9th Jan, 2010

公平配分に関する古典理論

1.アリストテレス的平等原則

1)分配的公正は比例的配分？

企業の倒産 (firm's bankruptcy)、

遺産相続 (bequests to heirs)、

公共リスクへの責任

ニューヨーク州控訴裁判での判決、モントリオール議定書

2)アリストテレスの公正原則

人の平等と分け前における平等

3)比例的配分の前提条件

分割可能性　・要求（責任）が共通尺度で測度化可能

要求状況のタイプ

1)配分対象資産の特別な部分に対する要求

遺言書にもとづく土地の相続問題

---->ＣＧルール？

2)配分対象資産のある量の要求

不随意的状況：遺言書にもとづく資金的相続問題、

企業収益の配分問題、

企業破産の責任配分問題など

---->比例的配分？

ＣＧルール

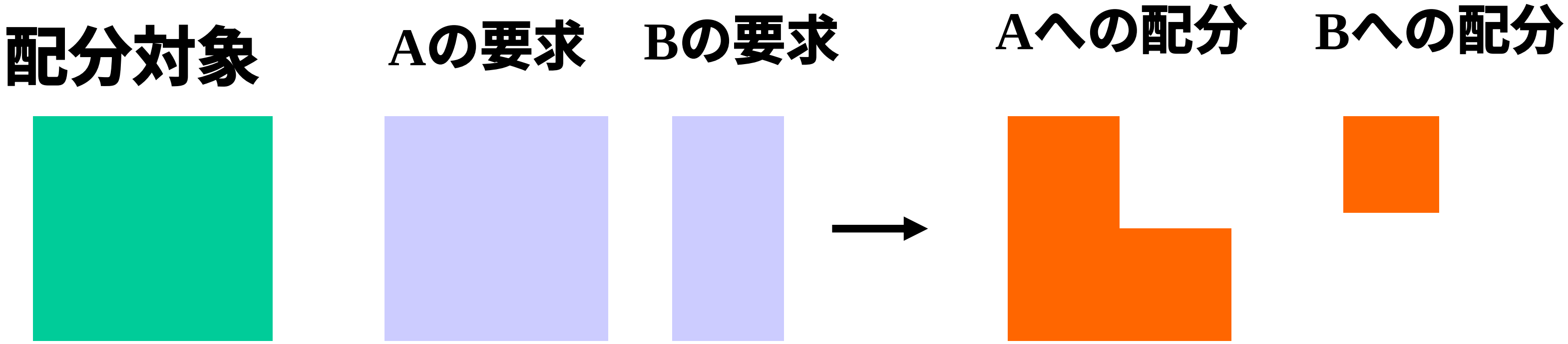
The Contested Garment Rule

奪い合って擦り切れた布切れのルール？

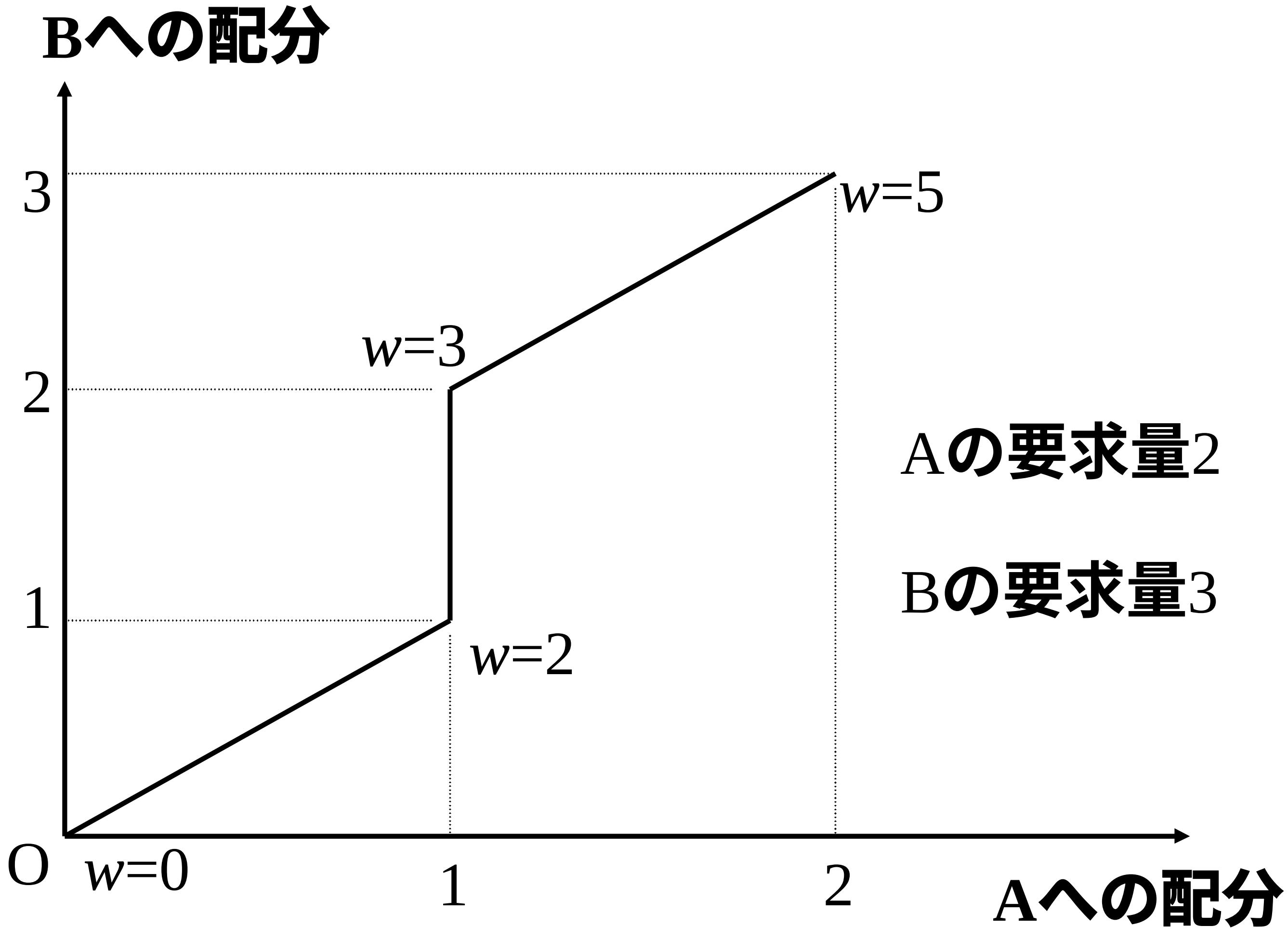
- バビロニアンタルムード(Babylonian　Talmud)のミシュナ(Mishna)に集録

- ２人版ＣＧルール

競合部分は均等配分、１人だけの要求部分はそのまま配分



配分対象量 *v* の大きさと配分の関係



手続き論によるCGルールの解釈

run-on-the-bank procedure

配分対象資産へのアクセス（機会）の平等

A:　1＊（1/2）　＋（1/2）＊（1/2）　＝　3/4

B：（1/2）＊（1/2）　＋　0＊（1/2）　＝　1/4

競合部分均等による解釈では、要求者が3人以上のとき、一意性がないが、手続き論的解釈では一意に決定。

例：

配分対象量がw=4、A,B,Cの要求量がそれぞれ、

$r_A=1$，$r_B=2$，$r_C=3$のとき、

配分は、Aに2/3、Bに7/6、Cに13/6に決定される。

シャプレイ値との同等性

ー手続き論的決定はシャプレイ値と同値

要求者$A_1, A_2, \ldots A_N$について、

$v(A_{k1}\ A_{k2}, \ldots A_{kM})$ $(1 \leqq M \leqq N)$

は、前述の手続きによって、要求者たち$\{A_{k1}\ A_{k2}, \ldots A_{kM}\}$

に最低限配分される量の総量として計算

先の例では、

$v(A)=0$, $v(B)=0$, $v(C)=1$,

$v(AB)=1$, $v(BC)=3$, $v(CA)=2$, $v(ABC)=4$

手続き論的決定（シャプレイ値）の矛盾

（その1）　$c_A = 2$、$c_B = 3$、$a_0 = 3$　→配分は、Aに1、Bに2

$c_A = 1$、$c_{A'} = 1$、$c_B = 3/2$、$c_{B'} = 3/2$、$a_0 = 3$

→ 配分は、A(A')に7/12 B(B')に11/12

要求者を分割すると配分は増える？？

（その2） $c_A = 1$、$c_B = 2$、$c_C = 3$、$a_0 = 4$の例において、

AとBに配分された11/6をシャプレイ値で配分するとそれぞれ、1/2, 4/3　となる。

→　部分社会｛A，B｝の中ではAは不満ではないか？？

タルムードの配分との比較

	[タルムード]			[シャプレイ値]		
RESOURCE/CLAIM	A	B	C	A	B	C
1	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
2	1/2	3/4	3/4	1/3	5/6	5/6
3	1/2	1	3/2	1/2	1	3/2
4	1/2	5/4	9/4	2/3	7/6	13/6
5	2/3	5/3	8/3	2/3	5/3	8/3

- 均一配分と比例配分の混合？
- ＣＧルールの一貫性 → どの２人のペアもＣＧルールとなる配分

一般化ＣＧルールのアルゴリズムの発見

1)マイモニデスルール(Maimonides' Rule)

要求量を越えない範囲での均等配分

$\Sigma_{i=1}^{n} \min\{x, c_i\} = a_0 \rightarrow a_i = \min\{x, c_i\}$

2)一般化されたＣＧルールの配分量の決定法

(Aumann & Maschler(1985))

①$a_0 \leqq (1/2)\Sigma_{i=1}^{n} c_i$のとき、

要求量の半分を越えない範囲での均等配分

---> Maimonides' Rule

$\Sigma_{i=1}^{n} \min\{x, c_i/2\} = a_0 \rightarrow a_i = \min\{x, c_i/2\}$

②$a_0 \geqq (1/2)\Sigma_{i=1}^{n} c_i$のとき、

損失の均等配分

$\Sigma_{i=1}^{n} \min\{x, c_i/2\} = \Sigma_{i=1}^{n} c_i - a_0$

$\rightarrow a_i = c_i - \min\{x, c_i/2\}$

再び、仁(Nucleolus)

1)レキシミン順序

マクシミン順序の一般化

2)定義 (Schmeidler(1969))

最大不満最小化の原理、協力ゲーム (N, v)

B＝{ $x \in E^{\mathrm{N}}$｜$\sum_{i\in \mathrm{N}} x_i = v(\mathrm{N})$ } ：効率的配分の集合

$$e(x\,;\,\mathrm{S}) = \sum_{i\in \mathrm{S}} x_i - v(\mathrm{S}) \quad (x\in \mathrm{B})$$

効率的配分の中で e の最小値を最大にする配分

(もし一意に配分が決まらない場合は、2番目に小さい値を最大…)

⇔　仁

3)仁の特徴づけ

$$min_{\mathrm{S}\subset \mathrm{N}}\, e(x^*\,;\,\mathrm{S}) \geqq min_{\mathrm{S}\subset \mathrm{N}}\, e(x\,;\,\mathrm{S}) \quad (\forall x\in \mathrm{B})$$

$$\Leftrightarrow min_{\mathrm{S}\subset \mathrm{N},\mathrm{S}\neq \mathrm{N}} (\sum_{i\in \mathrm{S}} x_i^* - v(\mathrm{S}))$$

$$= max_{x\in \mathrm{B}}\{min_{\mathrm{S}\subset \mathrm{N}}(\sum_{i\in \mathrm{S}} x_i - v(\mathrm{S}))\}$$

仁とタルムードの同値性

EXAMPLE

配分対象量がw=2、A,B,Cの要求量がそれぞれ、$r_A=1$, $r_B=2$, $r_C=3$.

1．協力ゲームとして定式化

$$v(\mathrm{A})＝v(\mathrm{B})＝v(\mathrm{C})＝0,$$

$$v(\mathrm{AB})＝v(\mathrm{CA})＝0,$$

$$v(\mathrm{BC})＝1, v(\mathrm{ABC})＝2$$

2．コアの図示

高さ2の正三角形

$v(\mathbf{AB}) \leqq \Sigma_{A,B} x_i$

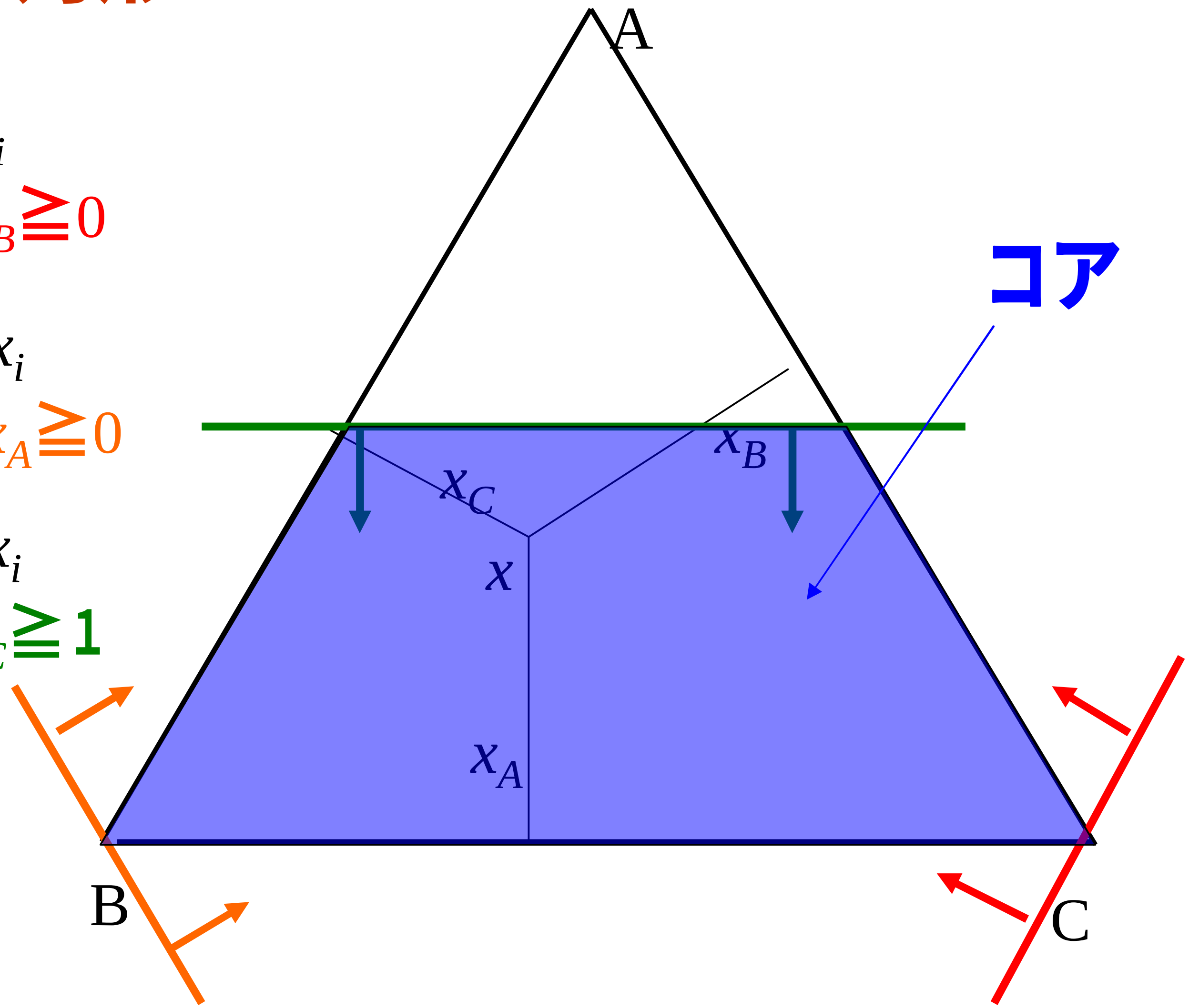
$\Leftrightarrow \quad x_A + x_B \geqq 0$

$v(\mathbf{CA}) \leqq \Sigma_{C,A} x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_C + x_A \geqq 0$

$v(\mathbf{BC}) \leqq \Sigma_{B,C} x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_B + x_C \geqq 1$



3. シャプレイ値の計算

$$
\begin{aligned}
6\sigma_A = \; & \overset{ABC}{v(A)-v(\phi)} + \overset{ACB}{v(A)-v(\phi)} \\
& + \overset{BAC}{v(AB)-v(B)} + \overset{BCA}{v(ABC)-v(BC)} \\
& + \overset{CAB}{v(CA)-v(C)} + \overset{CBA}{v(ABC)-v(BC)} \\
= \; & 2
\end{aligned}
$$

$$(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C) = (1/3, 5/6, 5/6)$$

4. 仁の計算

$e(x;\mathrm{A}) = x_A (= \boldsymbol{\alpha})$, $e(x;\mathrm{B}) = x_B (= \boldsymbol{\beta})$,

$e(x;\mathrm{C}) = x_C = 2-(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$, $e(x;\mathrm{AB}) = \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$

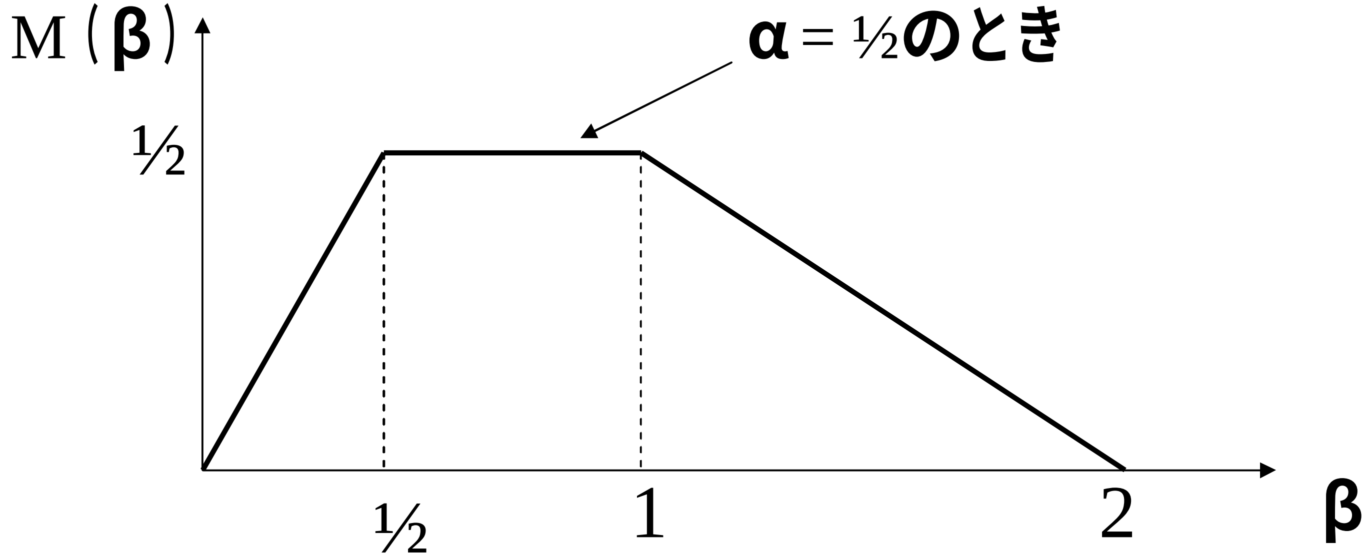
$e(x;\mathrm{CA}) = 2-\boldsymbol{\beta}$, $e(x;\mathrm{BC}) = 1-\boldsymbol{\alpha}$

$$min\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 2-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, 2-\boldsymbol{\beta}, 1-\boldsymbol{\alpha}\} \to Maximize$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$$

*min*内をαの関数として，最小値をM（β）とおくと、

$$M(\boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} \boldsymbol{\beta} & (0 \leqq \boldsymbol{\beta} < 1/2) \\ 1/2 & (1/2 \leqq \boldsymbol{\beta} \leqq 1) \\ 1-1/2\,\boldsymbol{\beta} & (1 < \boldsymbol{\beta} \leqq 2) \end{cases}$$



α = ½のとき,

$min\ \{\alpha, \beta, 2-\alpha-\beta, \alpha+\beta, 2-\beta, 1-\alpha\}$

$=min\ \{1/2, \beta, 3/2-\beta, 1/2+\beta, 2-\beta, 1/2\}$　$(1/2 \leqq \beta \leqq 1)$

$min\ \{\beta, 3/2-\beta, 1/2+\beta, 2-\beta\}$ を最大にするβは, $\beta=3/4$

$\rightarrow x_A=1/2, x_B=3/4, x_C=3/4$　（タルムードの解！）