18th Jan, 2010

エスカレーション

1. ドル･オークション (the dollar auction)

Martin Shubik (1971)

- 1ドルの競り落とし
- 一番高い値をつけた人が競り落とす.
- 付け値は、オークショナーに全額支払う.

※賞品 (1ドル) は最高額の
付け値をつけた人のみ

競りの結果は…

2.ドル･オークションの定式化 (O'Neill(1986))

・1ドルを競りにかける⇔原資b(bankroll)が1ドル.

※オークショナーが原資を貸し、競り終了後、勝者の残額は勝者に渡され、敗者は掛け金と合わせて原資を戻す.

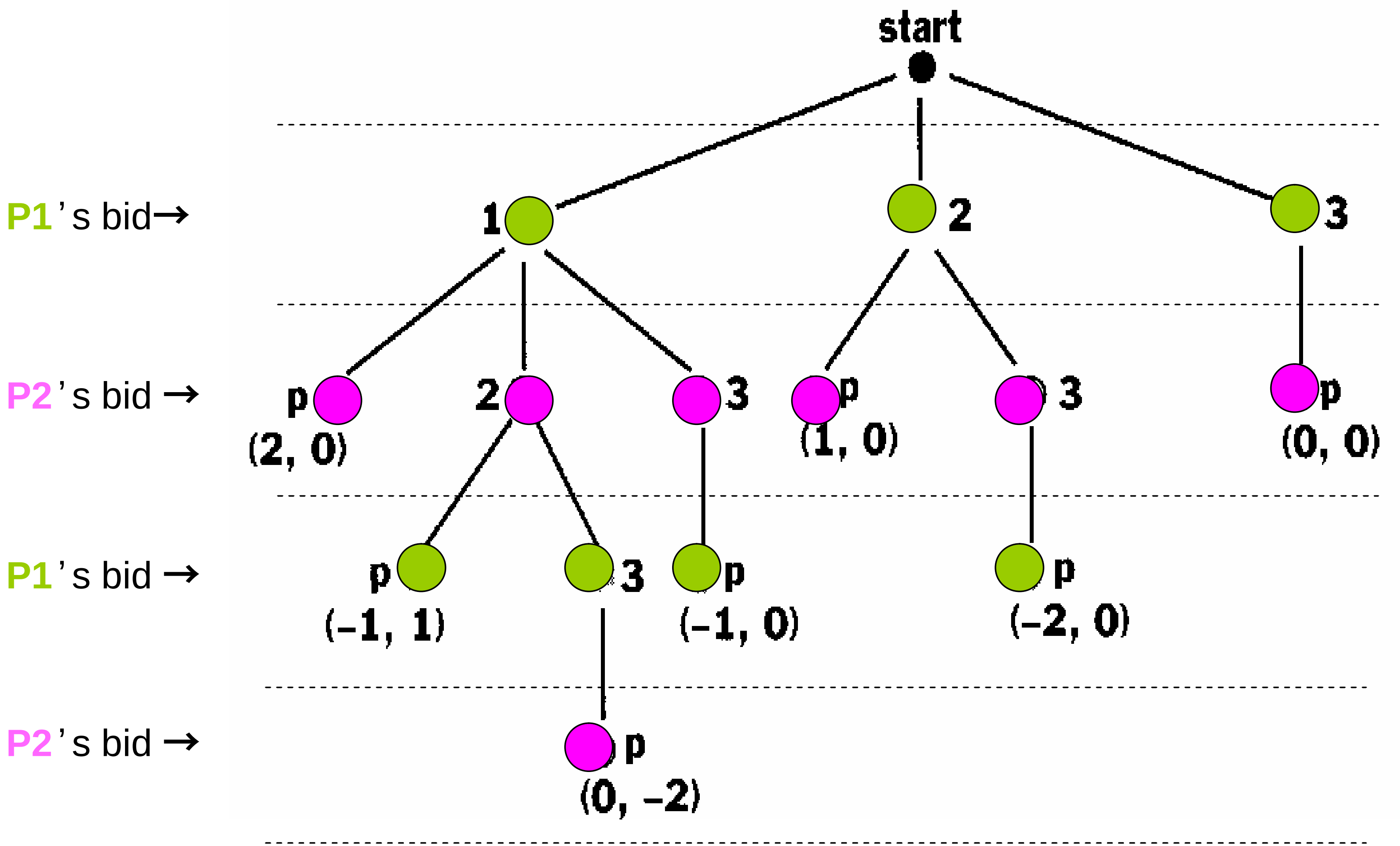
・1回の付け値(bid)の上限をs(stakes)とする.

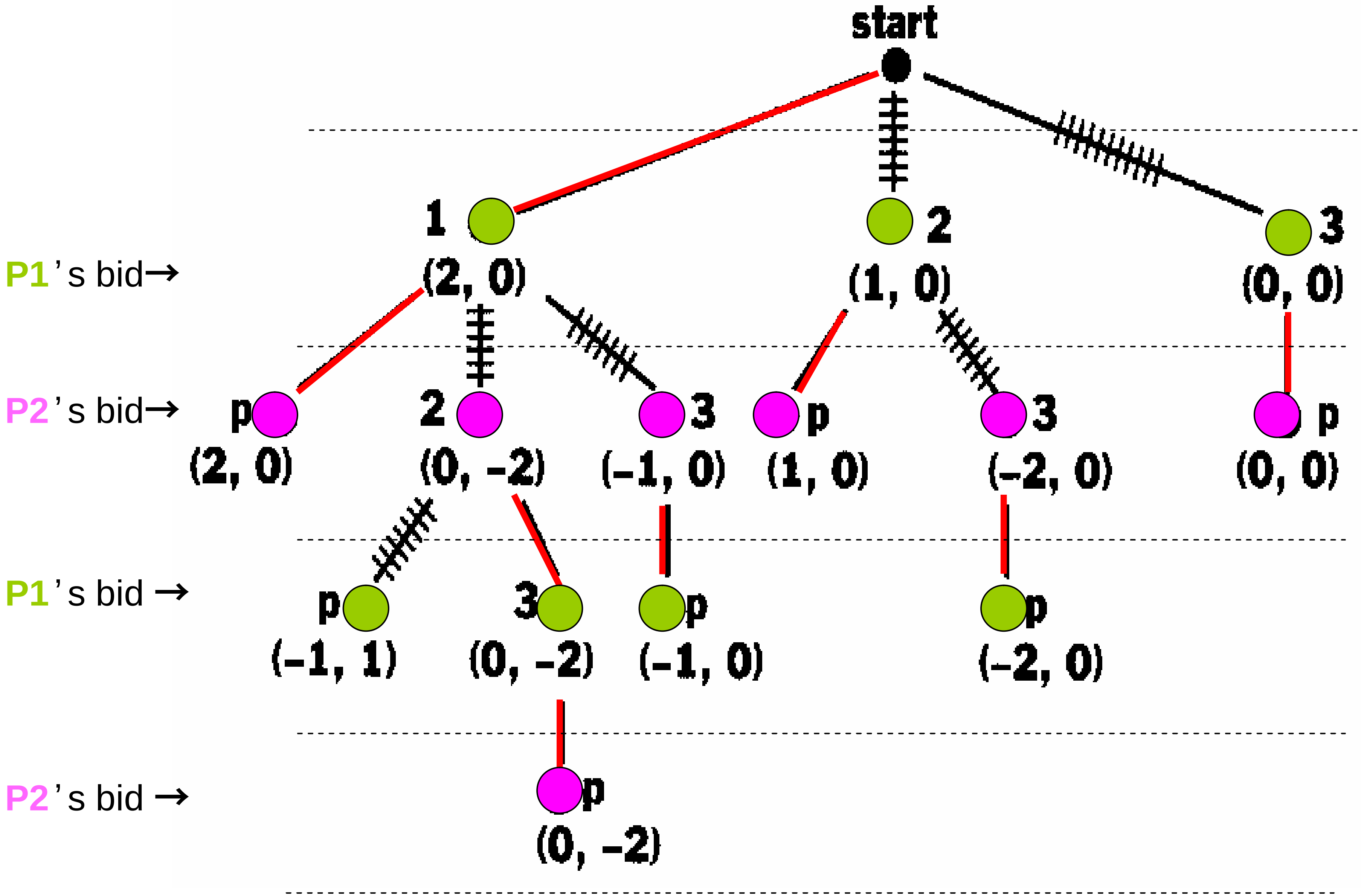
※ドル･オークションでは上限はないが, s＝100(セント) とするのが自然か？　(b=100)

・保守的な慣行 (conservative convention)：

※利益改善の範囲において必要な最小の付け値を出す.
(不要に高額の付け値は出さない)

s=b=3のケース


start
P1's bid→
1
2
3
P2's bid →
p
(2, 0)
2
3
p
(1, 0)
3
p
(0, 0)
P1's bid →
p
(-1, 1)
3
p
(-1, 0)
p
(-2, 0)
P2's bid →
p
(0, -2)


start
1
(2, 0)
2
(1, 0)
3
(0, 0)
P1's bid→
p
(2, 0)
2
(0, -2)
3
(-1, 0)
p
(1, 0)
3
(-2, 0)
p
(0, 0)
P2's bid→
p
(-1, 1)
3
(0, -2)
p
(-1, 0)
p
(-2, 0)
P1's bid →
p
(0, -2)
P2's bid →

3. O'Neill　の定理

b=100で説明.

Special number：

$b, b-(s-1), b-2(s-1), \ldots, b-n(s-1), \ldots, c$

(c：は非負の最小数)

s=20なら、100, 81, 62, ... , 24, <u>5</u>

【補題A】

前回の*bid*の額より$(s-1)$以下の額の*bid*でなければ合理的な*bid*にはなりえない.

Rationally available *bid*：

前回の付け値を上回る額が$(s-1)$以下の*bid*.

※初めての*bid*の場合は、前回の*bid*は0と考える.

【補題B】

あるrationally available な*bid*(の額) が相手の*pass*をもたらすなら，*pass*またはより高い額で*bid*するよりも，この額で*bid*する方が合理的である．

O'Neill の定理（Strong version)

相手の直近の*bid*を x とする（xがrationally available かどうかは問わない）．このときの最適な戦略は，

1）x より大きい最小のspecial number がrationally availableであれば，それを*bid*する．

2）1）の条件をみたす*bid*がなければ*pass*する．

O'Neill の定理

最初のプレイヤーの最適な*bid* (の額) は最小のspecial numberである．

4. 定理の証明 (Strong version)

帰納法による．

[Statement n]　相手の直近の*bid*をx＝100-nとするとき，
x より大きい最小のspecial number がrationally available
であればその額を*bid*し、そうでなければ*pass*する．

nを0から98の間の任意の自然数とし，[Statement 0]から
[Statement n] までのすべてが最適な戦略だとする．
※ n＝0, 1のときを確認

今、x＝100-nが相手の直近の*bid*だとする．（$n \geqq 2$）
l_a, s_pを，前回の自分の*bid*, および xを上回る最小の
special number とする．（$l_a < x < s_p$）

このとき，$s_p - x$は$s-1$以下である．

　ここで，$x+1$からs_p-1までの間で*bid*すれば，帰納法の仮定によって，相手は次にs_pを*bid*をし．自分は*pass*することになる．
すなわち，$x+1$からs_p-1までの間で*bid*するのは合理的でない．

　次にs_pを*bid*すれば相手は*pass*するので，s_pより高額の*bid*も合理的ではない．

　*pass*と*bid* s_pのどちらが合理的かについて：

【補題A】より，*bid* s_pがrationally available でなければ（前回の*bid*の額よりs以上大きい額であれば）*pass*し，rationally available であれば，【補題B】よりs_pを*bid*する．

５．ビクレイのオークション　(William Vickrey(1961))

Second-price sealed-bid auction

　最も高額な値を*bid*したものがオークションに勝つのは同じだが,勝者の支払額は２番目の*bid*の額である．

弱支配(weakly domination)

　一つの*bid*戦略が他の戦略を弱支配するとは、いかなる状況においても他の戦略よりも同じくらい好ましく、かつ少なくともある状況において厳密に好ましい他の戦略が存在する．

定理：

　ビクレイのオークションでは、商品に対する真の価値を*bid*する戦略が、他の戦略を弱支配する．

6. ビクレイの定理の証明

vを商品の実際の価値とし,xをオークション参加者の中のbidの最高額とする．このとき, vをbidすることが,他のどのbidよりも少なくとも同じくらい好ましいことを示そう．

ケース1：$x>v$のとき、

xより低いbidは,vをbidするのと同じ結果をもたらす．

（つまりオークションに負ける！）

xより高いbidは, vをbidするより状況が悪くなる．

（オークションに勝っても,支払い額がvより大きい）

ケース1：$x<v$のとき、

xより低いbidは,vをbidするより状況が悪くなる．

（オークションに負ける！）

xより高いbidは, vをbidするのと同じ結果をもたらす．

（オークションに勝って,支払い額もxで同じ）

ケース1：$x=v$のとき、

xより低いbidは,vをbidするのと同じ結果をもたらす．

（オークションに負ける！）

xより高いbidは, vをbidするのと好ましさは同じ．

（オークションに勝っての支払い額はv,これはオークションで負けるのと同じ好ましさ）