

# 交渉の理論

## ・ Nash が例示する交渉の場面

ビルとジャックの分割不能な対象物の分け方の問題

本、鞭、ボール、バット、箱、ペン、おもちゃ、ナイフ、帽子

両者は一定の  $N - M$  効用をもつ。(11.02資料9枚目)

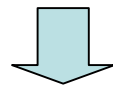
$u_B(p), u_J(q)$  ( $p, q$ はクジ、配分結果上の確率分布)

## ・ 交渉可能集合 $S$

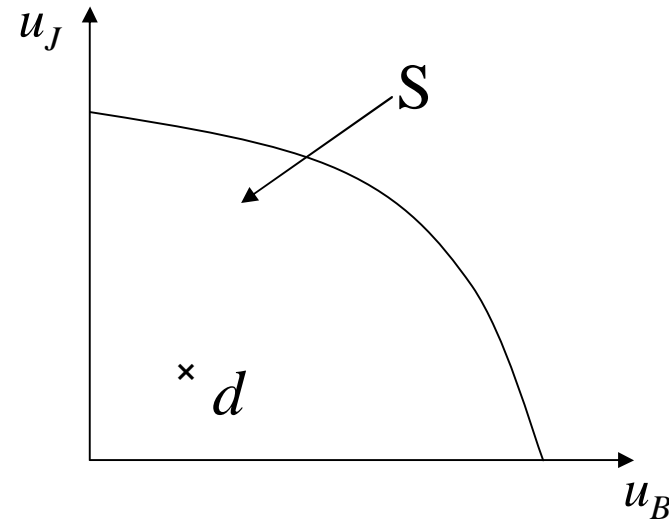
$S$ は凸集合

## ・ 脅迫点(行き詰まり点)

$d$  ( $d = (d_B, d_J)$ )



$E = (S, d)$ : 交渉問題



# 交渉結果に要求されるもの ～ 公理的アプローチ ～

社会選択関数  $F : E = \{E = (S, d)\} \rightarrow S$

## . パレート効率性 (P)

$E \in E$ ;  $F(E)$  は  $S$  の中でパレート最適である。

## . 測定尺度による不変性 (S.INV)

$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $E = (S, d)$  について,

$$S = \{(a_1 s_B + b_1, a_2 s_J + b_2) \mid (s_B, s_J) \in S\}$$

$$d = \{(a_1 d_B + b_1, a_2 d_J + b_2) \mid d = (d_B, d_J)\}$$

によって  $E = (S, d)$  を定めるとき,

$$F(E) = \{(a_1 F_B(E) + b_1, a_2 F_J(E) + b_2)\} \text{ である.}$$

## . 対称性の公理 (SYM)

$d=(0,0)$ とし, 任意の $(u_B, u_J) \in S$ に対して $(u_J, u_B) \in S$ であるとする. このとき, ある  $u^*$  について,  $F(S, d) = (u^*, u^*)$  である.

## . 縮約による一貫性の公理 (CC)

二つの交渉問題,  $E=(S, d)$  と  $E'=(T, d)$  において,  $S \subseteq T$  であるとする. このとき,  $F(E) \in S$  ならば,  $F(E) = F(E')$  である.

## . 定義域の非限定性 (U)

$F$ の定義域は、平面内の凸でコンパクトな集合<sup>注)</sup>  $S$ と,  $d \in S$ の組 $(S, d)$ のうち,  $s > d$ となる点を含んでいるものすべてである.

# ナッシュ交渉解

**個人合理性**: 交渉問題  $(S, d)$  において、 $s \in S$  が **個人合理的** であるとは、 $s_i \geq d_i$  ( $i=B, J$ ) が成り立つこと。

**ナッシュ交渉解  $F^N$** :

交渉問題  $(S, d)$  について、 $S$  の個人合理的な点の集合上で、積  $(u_B - d_B)(u_J - d_J)$  を最大にするような点  $(u_B, u_J)$  に写すような社会選択関数  $F$  をナッシュ交渉解という ( $F^N$  と書く)。

$(u_B - d_B)(u_J - d_J)$  を **ナッシュ積** という。

**定理 1**: 社会選択関数  $F$  が  $P, S.INV, SYM, CC, U$  を満たすなら、それはナッシュ交渉解であり、逆も成り立つ。

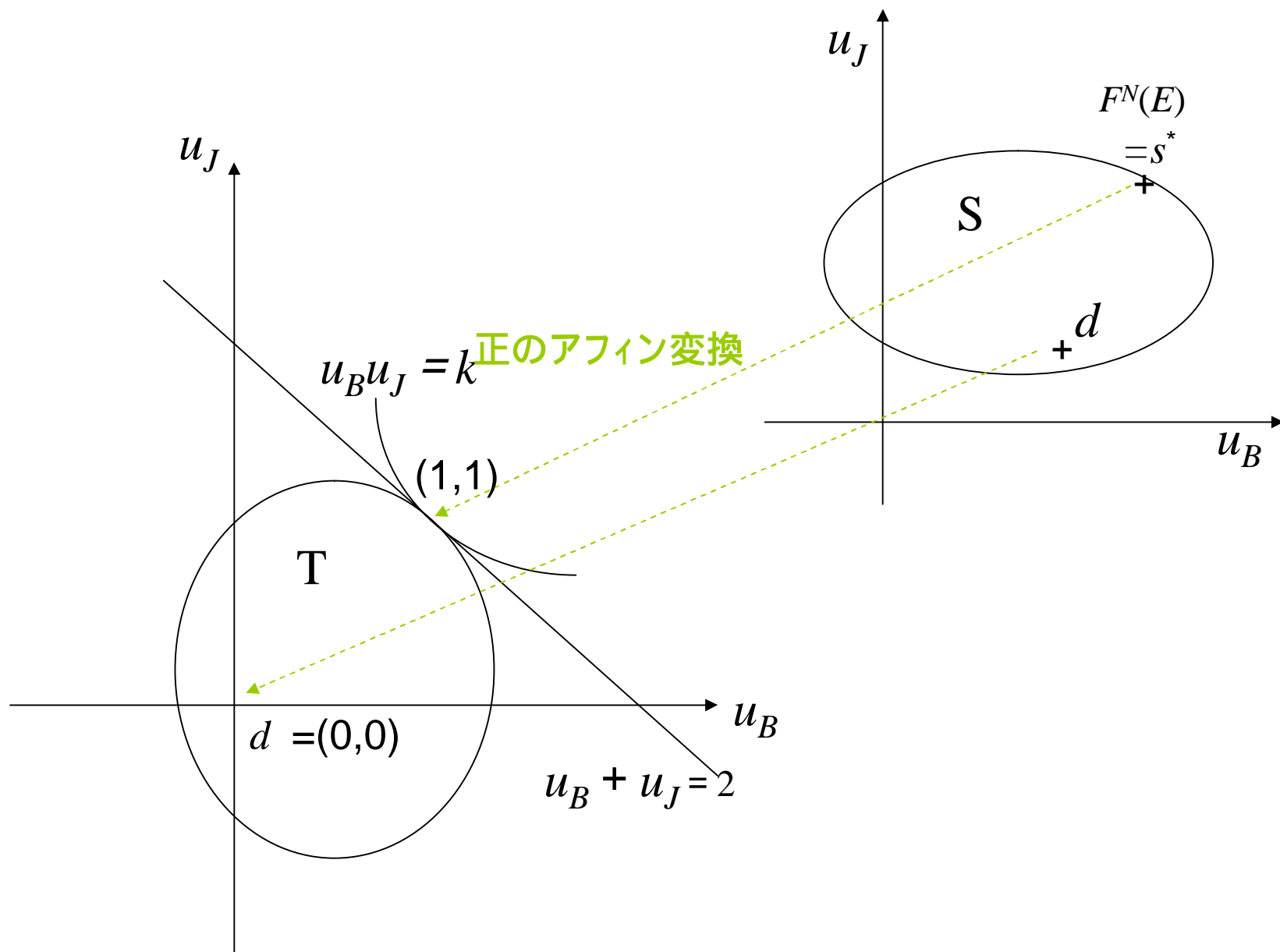
## 定理1の証明

1.  $F^N$ がP, S.INV, SYM, CC, Uを満たすことは簡単に示せる.

### ミニット・ペーパー

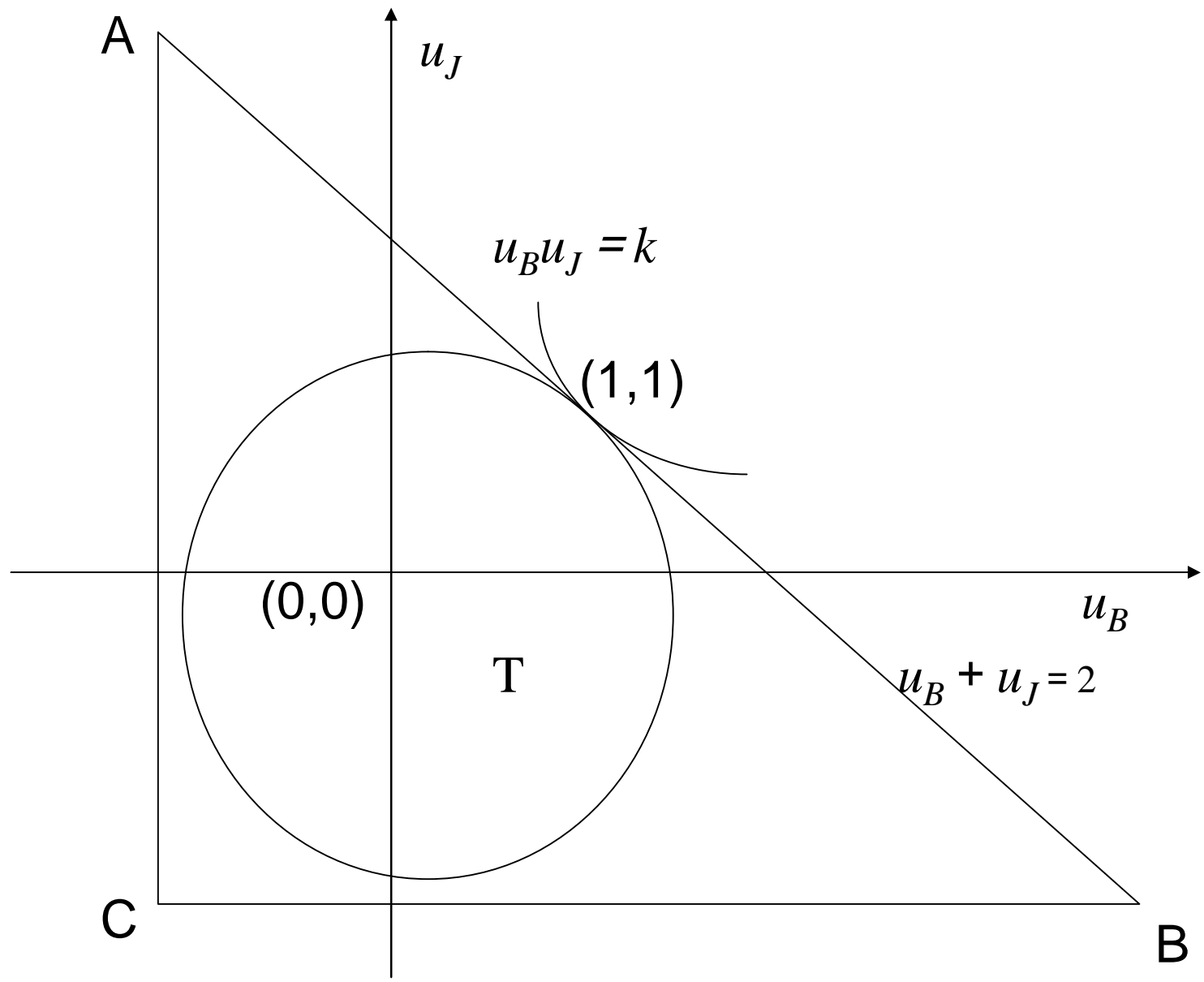
以下、これらの公理がナッシュ交渉解であるための十分条件になっていることを示す.

2. 任意の交渉問題 $E=(S, d)$ を与え,  $F^N(E)$   $S$ を $s^*$ で表しておく. このとき,  $ad+b=(0,0), as^*+b=(1,1)$ となるように $a=(a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $b=(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ を選ぶことができる. ここで,  $E$ を変換した問題,  $E'=(T, d')$  ( $T=aS+b, d'=ad+b=(0,0)$ )を考える.
3.  $T$ では, 個人合理的な点の集合上で点 $(1,1)$ が, ナッシュ積 $t_B t_J$ を最大にしている. また,  $T$ の凸性によって $(1,1)$ で $T$ と接する双曲線 $u_B u_J = k$  (定数)が存在する.



## 証明の続き

4.  $u_B + u_J = 2$  は前図においてTと双曲線  $u_B u_J = k$  を分離している。次に、新しい交渉問題  $(R, d)$  を作る。Rは図で描かれたABCである。
5. さて、先の5つの公理をみたす社会選択関数Fを考えよう。  
公理Uより  $(R, d)$  はFの定義域に入っている。Rは対称であるから、公理PとSYMによって  $F((R, d)) = (1, 1)$  である。  
 $(R, d)$  と  $(T, d)$  において、T = ABC (= R) であるから、  
公理CCより、 $F((T, d)) = (1, 1)$ 。公理S.INVにより、  
 $F((S, d)) = s^*$  である。





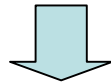
# 平等解について

## 公理CCへの疑念

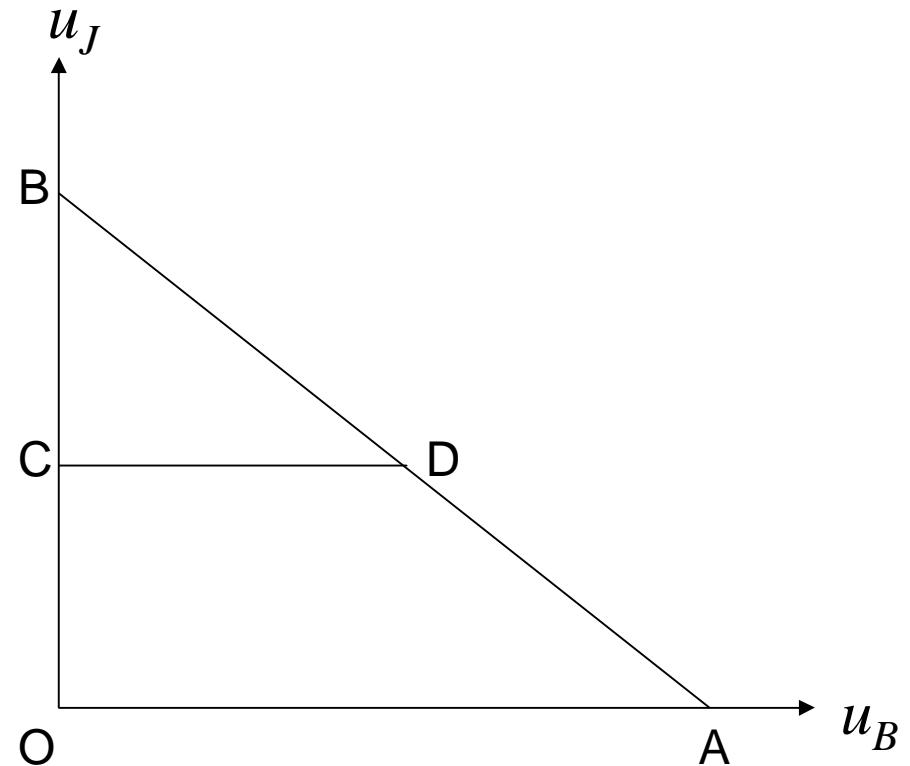
### 2つの交渉問題

( AOB, O )と  
( 台形AOCD, O )

前者の解がDであるとする  
と、後者の解もD(公理CC)。



ジャックは後者の交渉問題  
において弱い立場におかれ  
るにもかかわらず, “同等の  
立場”におかれる後者の交渉  
問題と結果が同じ?!



## 個人単調性の公理

理想点:

$$a_i(S,d) = \max\{s_i \mid s \in S, s \preceq d\} \quad (i=B,J)$$

### . 個人単調性の公理 (I.MON)

$(S,d)$ と $(T,d)$ を、 $S \subseteq T$ をみたす2つの交渉問題とする。このとき、 $a_B(S,d) = a_B(T,d)$ ならば、 $F_J((T,d)) \subseteq F_J((S,d))$ であり、 $a_J(S,d) = a_J(T,d)$ ならば、 $F_B((T,d)) \subseteq F_B((S,d))$ である。

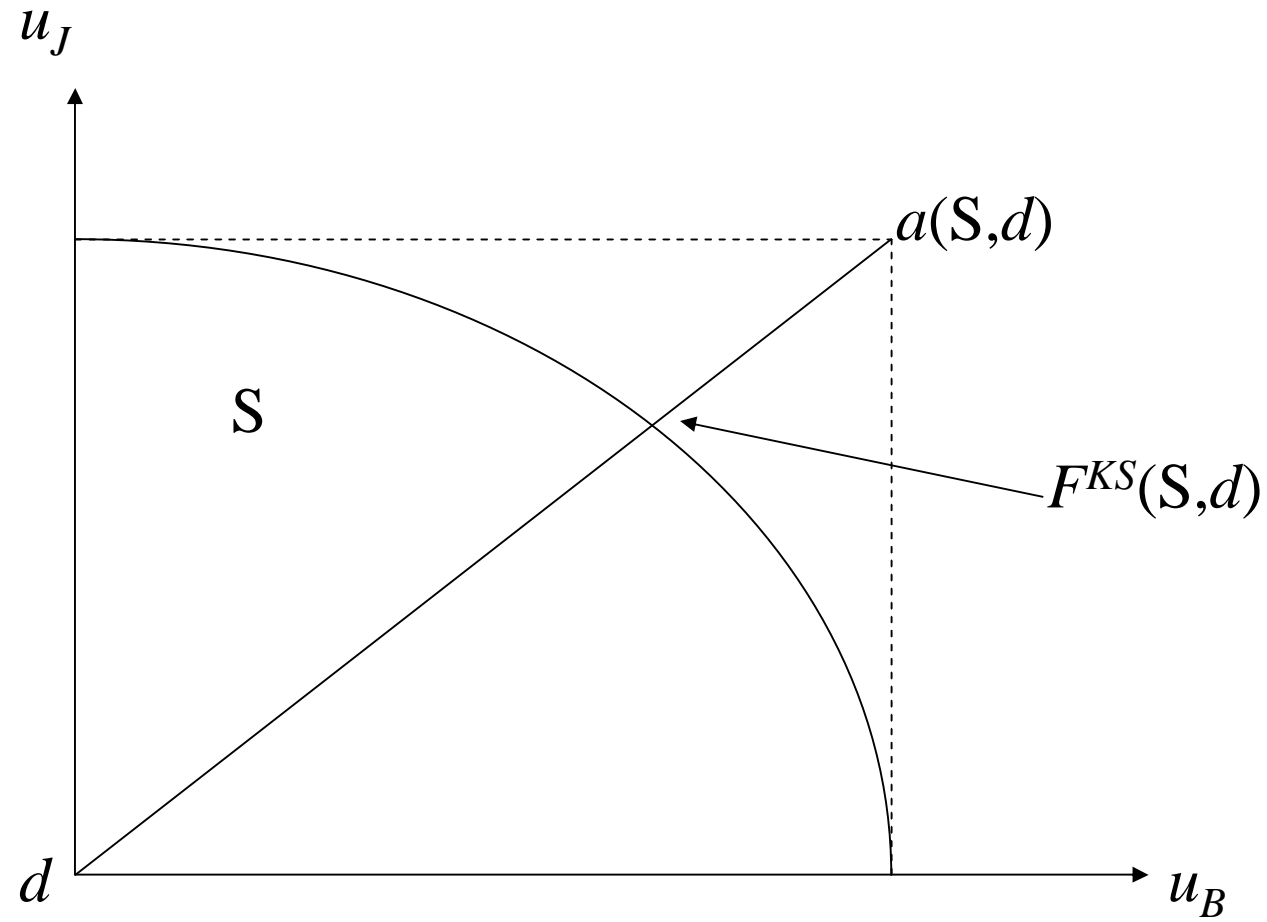
# カライ = スモロディンスキー解

## カライ = スモロディンスキー解 $F^{KS}$ :

交渉問題  $(S, d)$  について,  $S$  のパレートフロンティアと,  $a(S, d)$  と  $d$  を結ぶ直線との交点を対応させる社会選択関数  $F$  をカライ = スモロディンスキー解という ( $F^{KS}$  と書く) .

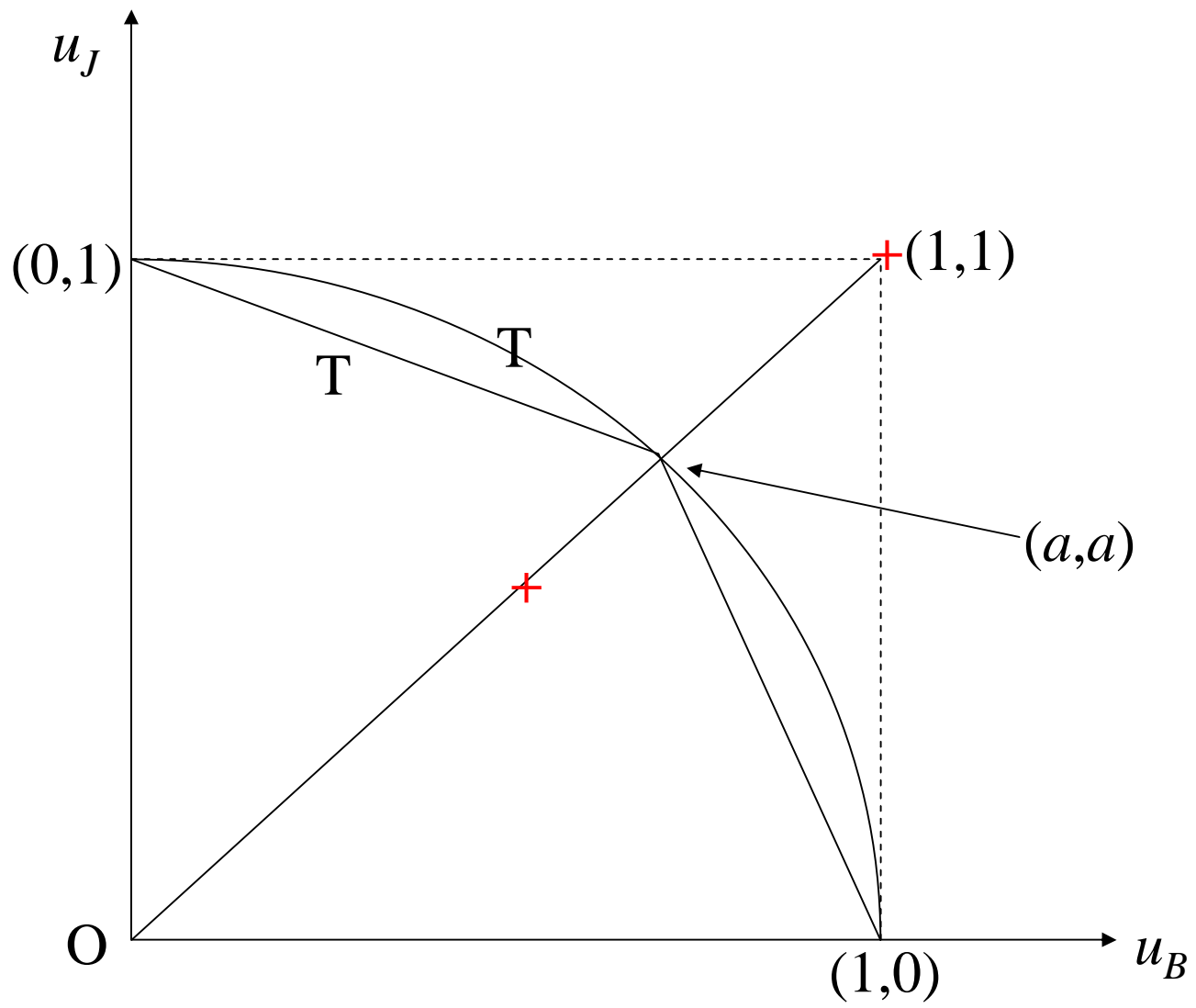
定理 2 : 社会選択関数  $F$  が  $P, S.INV, SYM, I.MON, U$  を満たすなら, それはカライ = スモロディンスキー解である.

# カライ = スモロディンスキー解の図示



## 定理2の証明

1. 平面上の任意の交渉問題  $(S, d)$  が与えられたとき, 正のアフィン変換によって,  $a(S, d)$  を  $(1, 1)$  に,  $d$  を  $(0, 0)$  に移すことができる (公理Uにより,  $a(S, d) > d$  であることによる). この新しい問題を  $(T, 0)$  と書けば, 交渉問題  $(S, d)$  の解 ( $F$  の値) は  $(T, 0)$  の解に移される.
2.  $(T, 0)$  の解  $F^{KS}(T, 0)$  は要素が等しい. (脅迫点  $d$  と  $a(T, 0)$  を結ぶ直線の傾きは1であるから). この点を  $(a, a)$  とおく.
3. 次図に描かれているように, 点  $(a, a), (1, 0), (0, 1)$  および  $0$  を結ぶ四角形  $T$  を作る. 公理Uによって, 交渉問題  $(T, 0)$  は  $F$  の定義域に入るが,  $T$  は対称なので, 公理SYMと公理Pによって,  $F(T, 0) = (a, a)$  である.



## 証明の続き

4.  $T \cong T', a_i(T', O) = a_i(T, O) (i=B, J)$ であるから, 公理**I.MON**によって,  $F_i((T', d)) = F_i((T, d)) (i=B, J)$ .

これは3. より,  $F(T, O) = (a, a)$ を意味し, 公理**P**により,

$F(T, O) = (a, a)$ , すなわち,  $F(T, O) = F^{KS}(T, O) = (a, a)$ .

1. に戻って公理**S.INV**より,  $F(S, d) = F^{KS}(S, d)$

# 交渉理論の背景にある経済環境

## 実験による交渉理論の妥当性の検証

### ヤーリ＝バーヒレルの実験(1984)

12個のグレープフルーツを12個のアボガドを、ジョーンズとスミスにどう配分すべきか。

#### [経済環境]

ジョーンズは1個のグレープフルーツから100mgのビタミンFを代謝でき、アボガドからは何も代謝しない。

スミスは1個のアボガド、1個のグレープフルーツ、どちらからも50mgのビタミンFを代謝できる。

#### 栄養摂取関数

ジョーンズ： $v_J(x,y)=100x$

スミス： $v_S(x,y)=50x+50y$



# 公正な配分基準は何か？

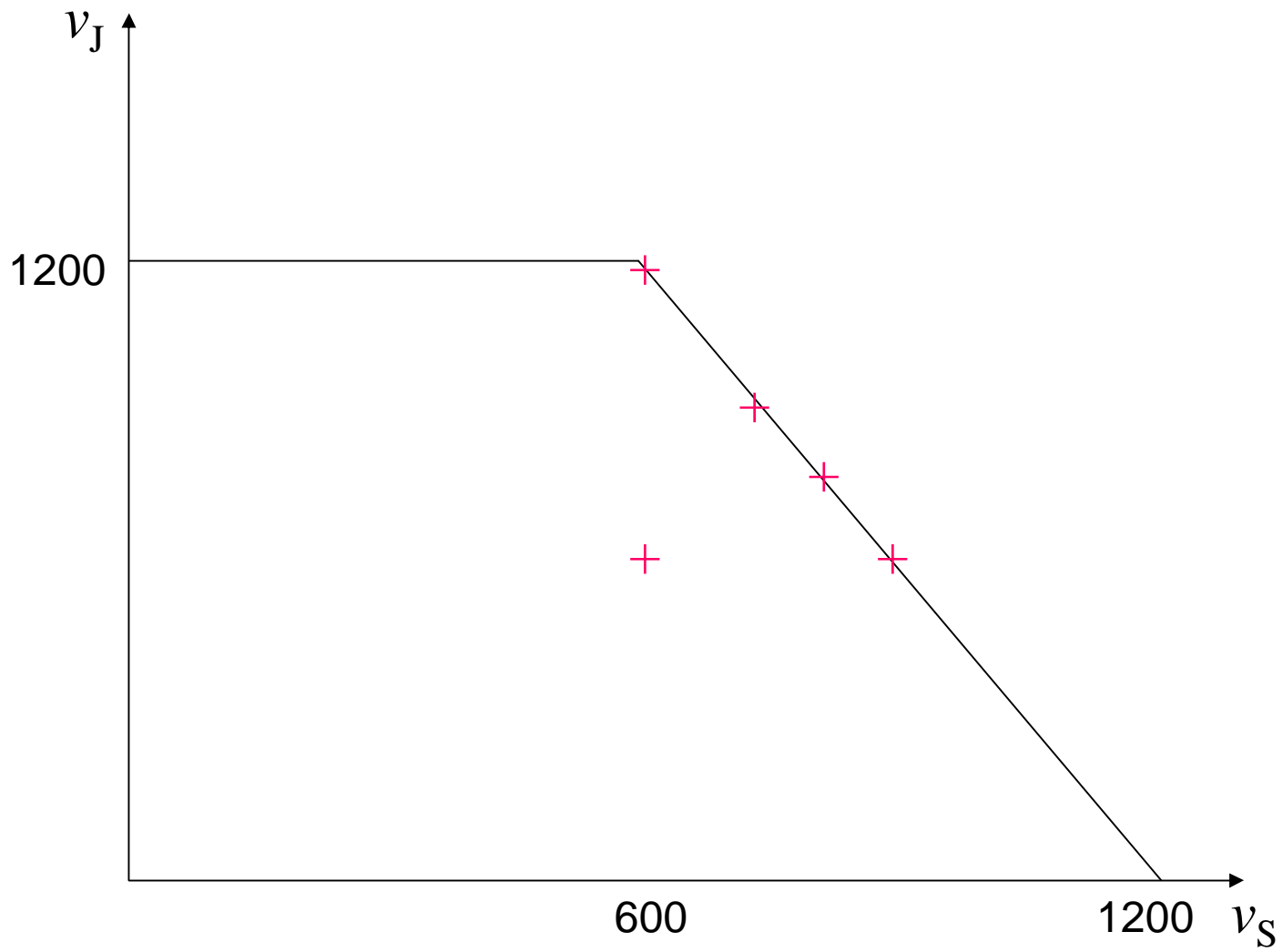
J(6,6) S(6,6) 均等分割

J(6,0) S(6,12) 強パレート集合上でのナッシュ交渉解

J(8,0) S(4,12) マクシミン(カライ = スモロディンスキー解)

J(9,0) S(3,12) 均等分割を脅迫点とするナッシュ交渉解

J(12,0) S(0,12) (0,0)を脅迫点とするナッシュ交渉解



# 経済環境を変える...

[経済環境: その2]

ジョーンズは**グレープフルーツ**が好きで**1個につき1ドル**の価値をつけるが、**アボガドは大嫌い**である。

スミスは、**両方とも好き**でそれぞれ**1個につき0.5ドル**の価値をつけている。

[経済環境: その3]

まず、グレープフルーツには**ビタミンF**が**100mg**ずつ含まれ、アボガドには**ビタミンG**が**100mg**ずつ含まれていることが情報として与えられる。

ジョーンズは**ビタミンFを必要**とするが、それを**1mg代謝するには0.5mgのビタミンG**が要求される。

スミスは**ビタミンGが必要**であり、それを**直接代謝**することができる。このとき、彼らの効用関数は次のようになる：

$$\text{ジョーンズ: } v_J(x,y) = \min(100x, 200y)$$

$$\text{スミス: } v_S(x,y) = 100y$$

# 課題

1. 3つの経済環境では,ジョーンズとスミスの交渉問題はすべて同じ交渉可能集合上で定義されることを確認しなさい.
2. 3つの経済環境ごとに,皆さんの公正観に従って公正な配分を から の中から選びなさい.

締切:2月1日(月)授業終了時