ニューカムのパラドックス
皆さんの回答

	文系	理系	計	男	女	不明
α	9	10	19	14	4	1
β	6	9	15	9	5	1
他	1	2	3	2	1	0

	文	教	経	理	工	農
α	3	1	5	9	1	0
β	1	1	4	2	1	6
他	1	0	0	1	0	1

経済と社会

16th Nov., 2009

社会的厚生へのソフトなアプローチ
線形計画法

1．環境負荷を減らす行政（政府）の努力

外部不経済の問題

2．線形計画法と経営科学

最適化数学、双対問題

1　外部不経済の内部化

1．1　外部不経済とは何か

競争市場で成立する財の価格の不適切性

A.C.Pigou（1877－1959）

⇒社会的費用の発生

（環境負荷を考慮しない安価な価格による過剰消費）

・鉄道機関車の火粉による火災（ Pigou による例）

・公害　・交通騒音　・喫煙　など

1．2　数値例（企業活動と公害）

生産量 x	1	2	3	4	5
売上げ額	50	100	135	145	145
生産コスト	40	50	55	55	60
利益 y	10	50	80	90	85
損害（環境負荷） z	5	10	30	60	100
社会的利益 y－z	5	40	50	30	-15

1．3　市場の失敗

企業の最適生産量４

≠社会にとっての最適生産量３

⇒市場の失敗

Pigouの考え方⇒生産に関して課税,補助金

例：生産量χ１単位当たり、20の課税　（Pigou税）

１．４　数値例 (Pigou税)

生産量 x	1	2	3	4	5
売上げ額	50	100	135	145	145
生産コスト	40	50	55	55	60
Pigou税w	20	40	60	80	100
利益 y	-10	10	20	0	-15
損害 (環境負荷) z	5	10	30	60	100
社会的利益 y－z	-15	0	-10	-60	-115
社会全体 y－z＋w	5	40	50	20	-15

1．5　数値例 (Pigou補助金)

生産量 x	1	2	3	4	5
売上げ額	50	100	135	145	145
生産コスト	40	50	55	55	60
Pigou補助金w	60	40	20	0	0
利益 y	70	90	100	90	85
損害 (環境負荷) z	5	10	30	60	100
社会的利益 y－z	65	80	70	30	-15
社会全体y－z－w	5	40	50	30	-15

2. 線形計画法

2.1　最適化モデル

$$c'x \quad \to \quad maximize$$

$$subject\ to\ Ax \leqq b,\ x \geqq \theta$$

x：n次決定ベクトル、

c：n次定ベクトル、

b：m次定ベクトル、

θ：零ベクトル (n次)、

A：$m \times n$定行列

2.2　例示

(1) 生産管理問題

化学工場での生産計画:

利用可能な資源(電力、労働力、材料)のもとでの

製品A,B,Cの生産

製品1単位あたりの資源使用量、および使用限度

電力　:A 1, B 1, C 1　使用限度 7

労働力:A 1, B 2, C 2　使用限度 13

材料　:A 3, B -1 , C 1　使用限度 5

製品1単位生産における利潤

A:2, B:3, C:5

(2)定式化

$x = (x_1, x_2, x_3)'$：決定ベクトル（生産計画）

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\leqq 7, \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leqq 13, \\
3x_1 - x_2 + x_3 &\leqq 5, \\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

のもとで、

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \text{最大化}$$

(2')定式化 (行列表現)

$$(2\ \ 3\ \ 5)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{maximize}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) 解を求めるための基本的考え方

7元1次方程式

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 13 \\
3x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 5 \\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - z = 0
\end{cases}
$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ z \geqq 0$$

の解のうち、zの最も大きいものを求めることと考える.

x_4, x_5, x_6 **をスラック変数と呼ぶ**

(4) 2つのプロセス～シンプレックス法

第一段階

どうやって一つの解を求めるか.

(ここでは、x_1, x_2, x_3 ,x_4, x_5, x_6 , z ≧0をみたすような解をどのように探すか)

第二段階

第一段階で取り上げられた解の性質を担保しながら,
どうやってzを大きくしていくか.
そして, ある値以上に大きくできないことの判断の方法.

(5) 行列の基本変形

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基底変数（楕円内）以外の変数を0⇒

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x_4 = 7$, $x_5 = 13$, $x_6 = 5$,

$z = 0$

基本変形　（単位行列の移動）⇒

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -5/4 & 1/4 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 23/4 \\ 1/2 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 3/4$, $x_3 = 23/4$,

$x_4 = 1/2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$,

$z = 31$

（6）　最適性の確認

zを含む式（最下行）のx_iの係数が全て非負なら，　zは最大値（最適解）となっている．

理由：

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 + \xi_5 x_5 + \xi_6 x_6 + z = Z$$

$(\xi_i \geqq 0)$とし、任意の解を$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, z_0)$とする．

このとき、

$$\xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3 + \xi_4 w_4 + \xi_5 w_5 + \xi_6 w_6 + z_0 = Z$$

が成立つので、$Z \geqq z_0$

（7） 感度分析

⑴ 限界価値(シャドウプライス)

$$
\begin{cases}
(1/2)x_1 + x_4 - (1/2)x_5 = 1/2 \\
-(4/5)x_1 + x_2 + (1/4)x_5 - (1/2)x_6 = 3/4 \\
(7/4)x_1 + x_3 + (1/4)x_5 + (1/2)x_6 = 23/4 \\
3x_1 + 2x_5 + x_6 + z = 31
\end{cases}
$$

→最終式のスラック変数x_4，x_5，x_6の係数の符号を

限界価値 (shadow price)という。

x_4：0，　x_5：2，　x_6：1　　意味は？

⑻　双対問題

⑴ 双対定理

$c'x \rightarrow$ maximize

subject to $Ax \leqq b,\ x \geqq \theta$　　⒫

$b'y \rightarrow$ minimize

subject to $A'y \geqq c,\ y \geqq \theta$　　(D)

(D)を(P)の双対問題という。

このとき、

$$\max c'x = \min b'y$$

$$y'(Ax - b) = 0 \quad \& \quad x'(A'y - c) = 0$$

(2)主問題と双対問題の解の関係

zを含む式のx_iの係数α_iを用いて、 $y_k = \alpha_{m+k}$ $(k=1,\ldots,n)$

$$(7\ \ 13\ \ 5)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{minimize}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この問題の解は、 $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1$

本日の課題

生産管理問題の双対問題（最小化問題）の意味を解釈をせよ。

ヒント：y_1, y_2, y_3 を電力、労働力、材料の購入価格（単価）と考えてみよ.