経済と社会

30^{th} Nov., 2009

ゼロ和非協力ゲーム

1.ゼロ和2人ゲームの定式化

ペイオフ行列(*pay-off matrix*)によるゲームの設定

プレイヤー(*player*) A,B

Aの戦略(*strategy*) $i=1,2,\ldots,m$

Bの戦略 $j=1,2,\ldots,n$

$m\times n$行列P＝(a_{ij})

a_{ij}は、Aがi、Bがj を選んだときのBからAへの支払い。(Aの利得)

2.戦略について

純粋戦略(*pure strategy*)

Aは、$max_i\{min_j(a_{ij})\}$、Bは、$min_j\{max_i(a_{ij})\}$ となるi,jをそれぞれ選択する。
このとき、

$$max_i\{min_j(a_{ij})\} = min_j\{max_i(a_{ij})\} \quad (= v \text{とおく})$$

が成り立つとき、vをゲームの値(*game value*)という。
(i,jを純粋戦略という)

鞍点(*saddle point*)

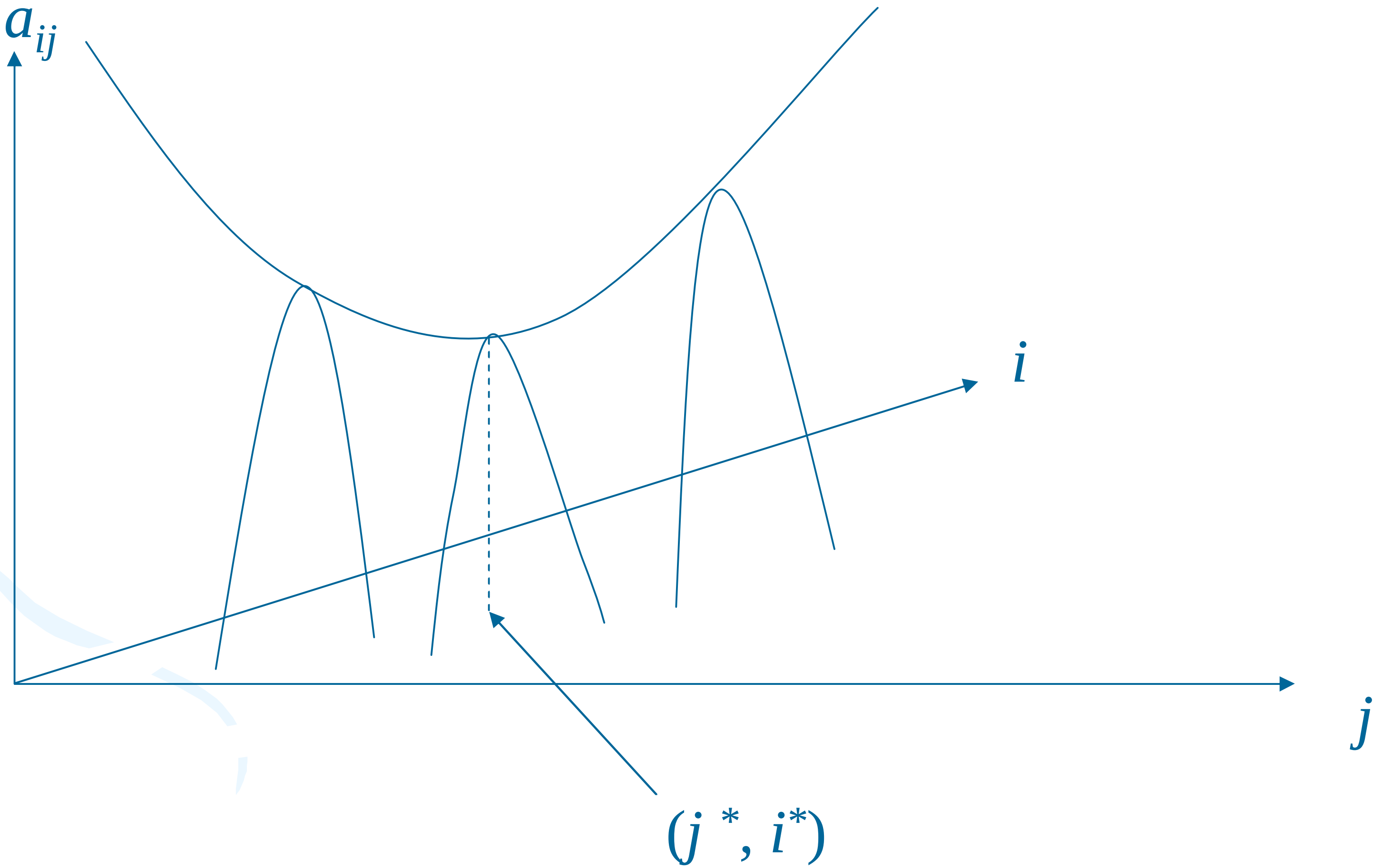
※(i^*, j^*)がPの鞍点であるとは次式をみたすこと

$$a_{ij^*} \leqq a_{i^*j^*} \leqq a_{i^*j}$$

ゲームの値をもつ必要十分条件は、Pが鞍点(i^*, j^*)をもつこと。

このとき、$v = a_{i^*j^*}$

鞍点の図示



（例示）ペイオフ行列

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

において、鞍点は（2,3）でゲームの値は -1

混合戦略(*mixed strategy*)

各純粋戦略を確率的に選択する戦略。

Aの戦略x $\{x=(x_1,\ldots,x_m) \mid \Sigma x_i=1,\ x_i\geqq 0\}$

Bの戦略y $\{y=(y_1,\ldots,y_n) \mid \Sigma y_j=1,\ y_j\geqq 0\}$

支払いの期待値$E(x,y)=\Sigma_i \Sigma_j a_{ij} x_i y_j$

ミニマックス定理(*Mini-Max Theorem*)

$E(x,y)$は必ず鞍点をもつ、すなわち次式をみたす

(x^*,y^*)が存在する。

$$E(x,y^*)\leqq E(x^*,y^*)\leqq E(x^*,y)$$

$$max_x\{min_y E(x,y)\}=min_y\{max_x E(x,y)\}=v\ (=E(x^*,y^*))$$

※一般に鞍点は複数ある場合もあるが、ゲームの値は等しい。

最適戦略の必要十分条件

x^*がＡの最適戦略であるための必要十分条件は、$v \leqq E(x^*, j)$ $(j=1,2,\ldots,n)$

y^*がＢの最適戦略であるための必要十分条件は、$v \geqq E(i, y^*)$ $(i=1,2,\ldots,m)$

(ここで、i, jは純粋戦略を表わす)

支配される戦略 (*dominated strategy*)

Ａの戦略x^dが戦略xに対して支配される戦略であるとは、すべてのyについて$E(x^d, y) \leqq E(x, y)$が成り立つこと。

3．混合戦略の例示

例1

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aの戦略（x, $1-x$），　Bの戦略（y, $1-y$）とすると

$E(x,y)=(12x-7)y-3x+3$

$x \geqq 7/12$　**のとき**, $\min_y E(x,y)= -3x+3$

$x < 7/12$　**のとき**, $\min_y E(x,y)= 9x-4$

よって、$\min_y E(x,y)$ **の最大値は**5/4　（$x=7/12$**のとき**）

同様に、$\max_x E(x,y)$ **の最小値は**5/4　（$y=1/4$**のとき**）

$x^*=(7/12, 5/12)$,　$y^*=(1/4, 3/4)$,　$v=5/4$

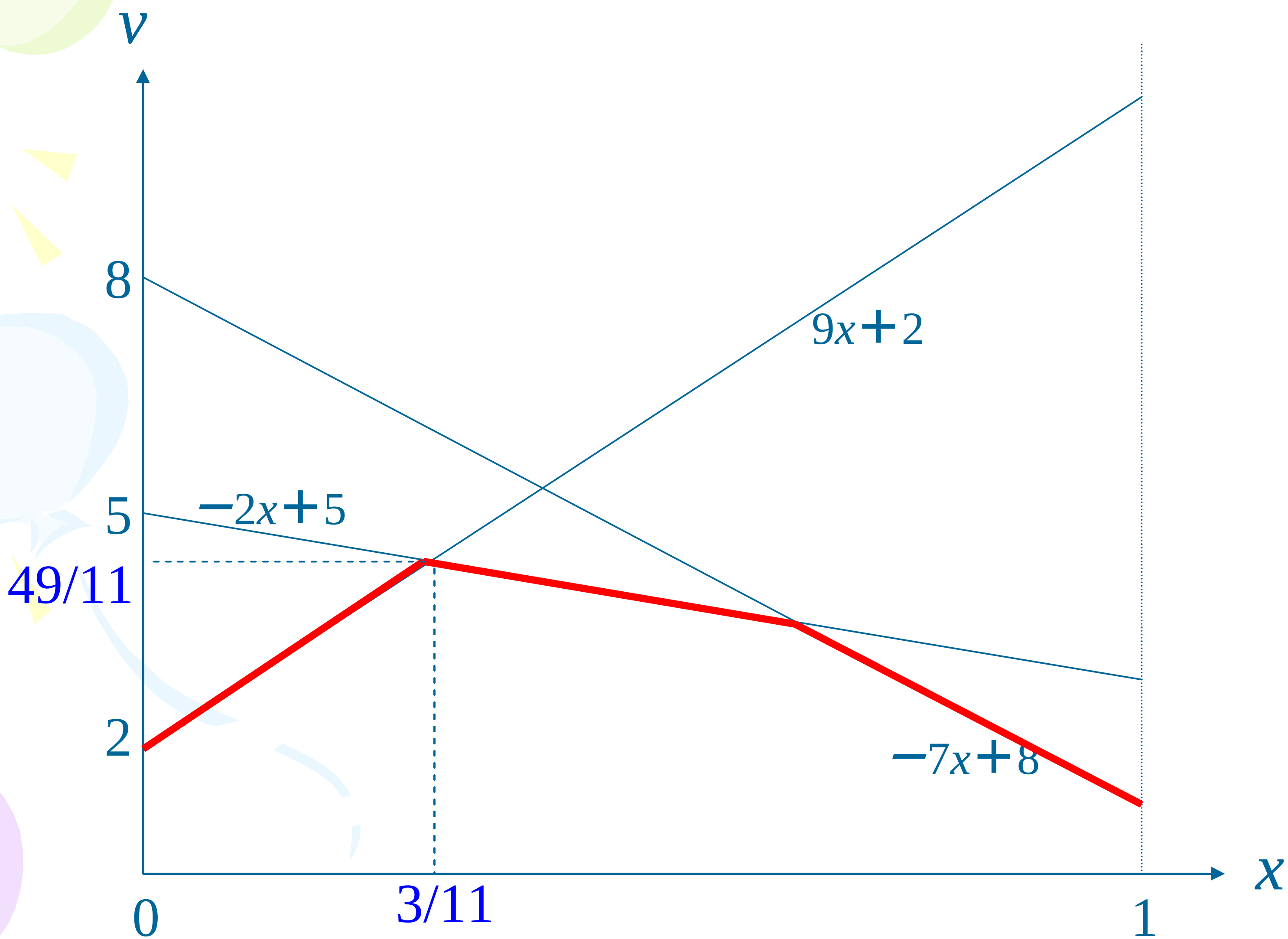
3．混合戦略の例示

例2

$$\begin{array}{cc} & j \longrightarrow \\ i \downarrow & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \\ \multicolumn{3}{c}{\boxed{7 \qquad 4 \qquad 1}} \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \textit{dominated by } i=2$$

Aの戦略を（x，1－x, 0）**とおくとき、**
最適戦略の必要十分条件より、$v \leqq E(x^*, j)$

$$\begin{cases} v \leqq -7x+8 \\ v \leqq -2x+5 \\ v \leqq 9x+2 \end{cases}$$



v
8
5
49/11
2
0
3/11
1
x
9x+2
−2x+5
−7x+8

$x^{*}=(3/11,8/11,0),\quad v=49/11$

次に、$v<E(x^{*},1)$であるから、Bは戦略 $j=1$をとることはない。

Bの戦略を（$0, y, 1-y$）とおいて、$v \geqq E(i, y^{*})$ であるから、

$$\begin{cases} v \geqq 3y+11(1-y) \\ v \geqq 5y+2(1-y) \end{cases}$$

$y^{*}=(0,9/11,2/11)$

4. 線形計画法とゼロ和2人ゲームとの関係

x^*がAの最適戦略であるための必要十分条件は、

$$v \leqq E(x^*, j) \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

y^*がBの最適戦略であるための必要十分条件は、

$$v \geqq E(i, y^*) \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

(a_{ij})を利得行列として、AとBの混合戦略を、$x=\{x_1, x_2, .., x_m\}$, $y=\{y_1, y_2, .., y_n\}$とおくと、上式は

$$\sum_i a_{ij} x_i \geqq v, \quad x_i \geqq 0, \quad \sum_i x_i = 1$$

$$\sum_j a_{ij} y_j \leqq v, \quad y_j \geqq 0, \quad \sum_j y_j = 1$$

$v > 0$ として一般性を失わないから

$$\sum_i a_{ij}(x_i / v) \geqq 1,\quad (x_i / v) \geqq 0,\quad \sum_i (x_i / v) = \mathbf{1}/v$$
$$\sum_j a_{ij}(y_j / v) \leqq 1,\quad (y_j / v) \geqq 0,\quad \sum_j (y_j / v) = \mathbf{1}/v$$

すなわち、次の2式をみたす$\boldsymbol{\lambda}_i$ $\boldsymbol{\mu}_j$およびvを求めればよい。

$$\sum_i a_{ij} \boldsymbol{\lambda}_i \geqq 1,\quad \boldsymbol{\lambda}_i \geqq 0,\quad \sum_i \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{1}/v$$
$$\sum_j a_{ij} \boldsymbol{\mu}_j \leqq 1,\quad \boldsymbol{\mu}_j \geqq 0,\quad \sum_j \boldsymbol{\mu}_j = \mathbf{1}/v$$

$\boldsymbol{\lambda}_i$の式において、vは可能な限り大きいものであるから、
（$\boldsymbol{\mu}_j$の式において、vは可能な限り小さいものであるから、）

$$\sum_i \boldsymbol{\lambda}_i \rightarrow \mathit{Minimize\ s.t.} \sum_i a_{ij} \boldsymbol{\lambda}_i \geqq 1, \boldsymbol{\lambda}_i \geqq 0$$
$$\sum_j \boldsymbol{\mu}_j \rightarrow \mathit{Maxmize\ s.t.} \sum_j a_{ij} \boldsymbol{\mu}_j \leqq 1, \boldsymbol{\mu}_j \geqq 0$$

→これらは、互いに双対なLP問題である。

5. ＬＰによるゼロ和2人ゲームの解法

(再述)

最適戦略の必要十分条件により、次式を解くことになる。

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geqq v, \quad x_i \geqq 0, \quad \sum_i x_i = 1 \\ \sum_j a_{ij} y_j \leqq v, \quad y_j \geqq 0, \quad \sum_j y_j = 1 \end{cases}$$

$v>0$のとき、上式をみたすx_i, y_jを求めるには、1, 2式のvをそれぞれL,Mとおき、

$x_i/L = \lambda_i$, $y_j/M = \mu_j$とおいて次の双対ＬＰ問題を解く。

$\Sigma_i a_{ij} \lambda_i \geqq 1 \ (j=1,2,\ldots,n)$、$\lambda_i \geqq 0$のもとで、
$f = \Sigma_i \lambda_i$ を最小化する

$\Sigma_j a_{ij} \mu_j \leqq 1 \ (i=1,2,\ldots,m)$、$\mu_j \geqq 0$のもとで、
$g = \Sigma_j \mu_j$を最大化する

これらの解λ_i, μ_jを用いて、ゲームの解は、
$v = 1/f = 1/g$, $x_i = \lambda_i v$, $y_j = \mu_j v$ となる。

※$v \leqq 0$のときは、a_{ij}に適当な定数を加えればよい。

前回の課題①

x_4:0,　x_5:2,　x_6:1　**意味は？**

$$3x_1 \qquad +0x_4 \quad +2x_5 \quad +1x_6 \quad +z \quad =31$$

もし、資源制約が緩和されるなら（スラック変数に余裕があるなら）、どの資源の緩和（x_i-⊿）が、それだけ利益増大⊿zに寄与するだろうか。

$$\frac{\Delta z}{\Delta x_4} = \mathbf{0}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x_5} = \mathbf{2}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x_6} = \mathbf{1}$$

<u>最適生産時</u>での、<u>資源の価値</u>を表す。

限界(Marginal)　　価値(Value)

前回の課題②

生産管理問題の双対問題（最小化問題）の意味を解釈をせよ。

商社による化学工場の資源購入計画

y_1, y_2, y_3 を電力、労働力、材料の購入価格（単価）とすると,

$$(7\ \ 13\ \ 5)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

化学工場の所有する生産資源の総価格

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

各製品1単位につき,

生産に必要な資源の総価格≧製品売却益

⇒商社の意思決定：資源購入費の最小化

栄養問題(線形計画法の事例研究)

　日本では，海外への食料依存により食余り現象が起きているが，**現在8億人（世界人口の約13%）が飢餓状態**にあると言われる．アマルティア･センのケイパビリティ論を持ち出すまでもなく，この世界的な食糧問題は解決されなければならない．

　先進諸国の食糧援助の最も大きな問題点は，地域に亘る公正な分配問題ではあるが，食料の市場価格と栄養の観点から**効率的な食料種に関する配分計画**を練っておくことも大切なのではないだろうか．

　食料F,G,Hには，ビタミンA,Bが含まれるが，下表は食料100円あたりの含有量と各ビタミンの必要量を示している．

	F	G	H	必要量	単位
ビタミンA	4	3	2	3	
ビタミンB	2	4	5	2	(g/100円)

この計画の目的は，最も安価にビタミンA，Bの必要量を与えることにある．まず，最適化問題として定式化するために，食料F，G，Hをそれぞれ$100x_1$円，$100x_2$円，$100x_3$円分ずつ配分するとしよう．次の問いに答えなさい．

(1) この問題は線形計画問題として定式化できるが、このとき主問題と双対問題を明記しなさい．

(2) 双対問題の意味を解釈し，それを解くことによって，主問題を解きなさい．