経済と社会

協力の可能性

7th Dec., 2009

1. インセンティブ･コンパティビリティ (Incentive Compatibility)

・**囚人のジレンマ状態 (PD)**

$$\begin{pmatrix} (p, p) & (r, q) \\ (q, r) & (s, s) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow q>p>s>r$$

・**効用関数 u_i**

$$u_i(x,y) = \alpha_i x + \beta_i y$$

$\beta_i = 0$ & $\alpha_i \neq 0$　純粋な利己主義 (pure egoism)

$\alpha_i = 0$ & $\beta_i \neq 0$　純粋な利己主義 (pure altruism)

$\beta_i > 0$　(<0)　正 (負) の利他主義　(慈善、悪意)

$\alpha_i > 0$　禁欲的、自虐的

$\alpha_i = \alpha$ & $\beta_i = \beta$ $(\forall i)$ のとき，

$$\begin{pmatrix} ((\alpha+\beta)p, (\alpha+\beta)p) & (\alpha r+\beta q, \alpha q+\beta r) \\ (\alpha q+\beta r, \alpha r+\beta q) & ((\alpha+\beta)s, (\alpha+\beta)s) \end{pmatrix}$$

これがPDであるための必要十分条件は，

$$\alpha > \max\{ \frac{p-r}{q-p}\beta, \frac{q-s}{s-r}\beta \} \quad \& \quad \alpha+\beta>0$$

ホッブスの人間像

自分の利得と他人の利得に対する優先度の凸結合

$$u_i(x,y) = \lambda x + (1-\lambda)(x-y) \quad (0 \leqq \lambda < 1)$$

⇒ホッブスの人間像では，PDは解決できない。

（例外：$\lambda = 0$）

2. 利他的利己主義

『協力者が増すような戦略をとることによって、自分の利益を増やそうとする意思決定』

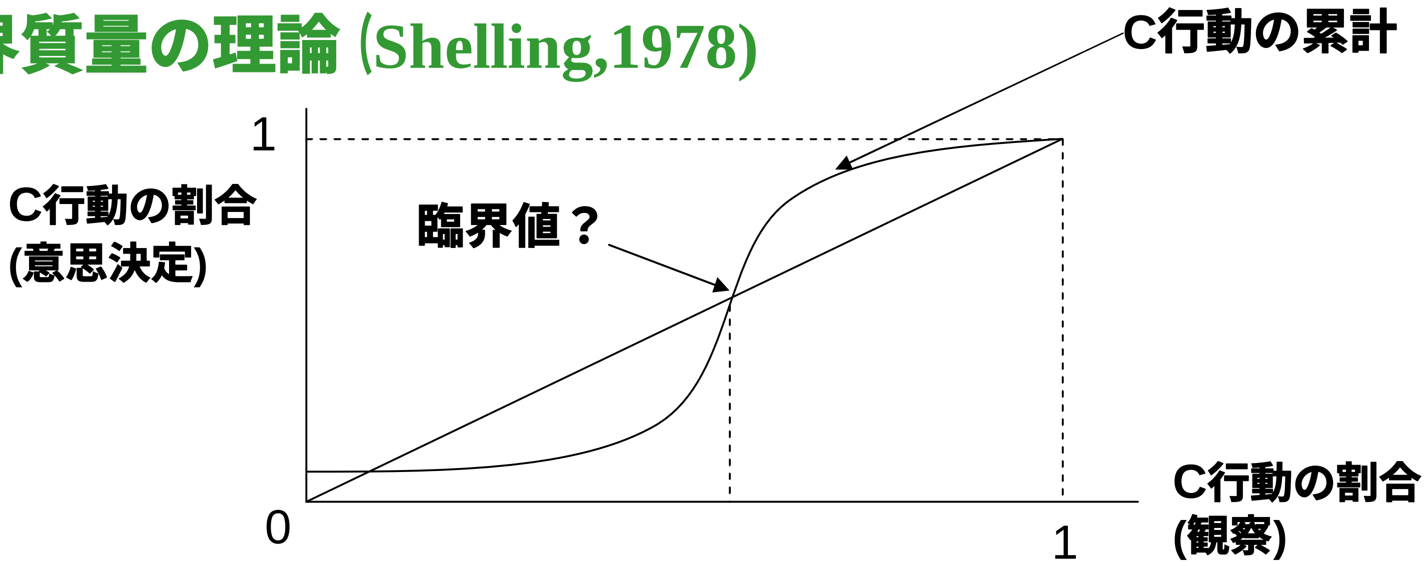
例：N=10 “100円寄付ゲーム”

寄付金は倍額として戻ってくる。

この場合、「5人以上寄付するなら寄付する」という戦略は，Nash均衡．

ただし，4人のフリーライダー (Free rider)の発生！

限界質量の理論 (Shelling,1978)



3.メタゲーム（Meta games）（Howard,1971）

条件付戦略

プレイヤー1：C, D

プレイヤー2：C/C, D/D, C/D, D/C

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} C/C & D/D & C/D & D/C \end{array} \\
\begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (3,\ 3) & (1,\ 4) & (3,\ 3) & (1,\ 4) \\ (4,\ 1) & \boxed{(2,\ 2)} & (2,\ 2) & (4,\ 1) \end{pmatrix}
\end{array}$$

条件付戦略

プレイヤー1：C/C/C/C, C/C/C/D,…, D/D/D/D

プレイヤー2：C/C, D/D, C/D, D/C

	C/C	D/D	C/D	D/C
C/C/C/C	(3，3)	(1，4)	(3，3)	(1，4)
C/C/C/D	(3，3)	(1，4)	(3，3)	(4，1)
C/C/D/C	(3，3)	(1，4)	(2，2)	(1，4)
C/D/CC	(3，3)	(2，2)	(3，3)	(1，4)
D/C/C/C	(4，1)	(1，4)	(3，3)	(1，4)
C/C/D/D	(3，3)	(1，4)	(2，2)	(4，1)
C/D/C/D	(3，3)	(2，2)	$\boxed{(3，3)}$	(4，1)
C/D/D/C	(3，3)	(2，2)	(2，2)	(1，4)
D/C/C/D	(4，1)	(1，4)	(3，3)	(4，1)
D/C/D/C	(4，1)	(1，4)	(2，2)	(1，4)
D/D/C/C	(4，1)	(2，2)	(3，3)	(1，4)
C/D/D/D	(3，3)	(2，2)	(2，2)	(4，1)
D/C/D/D	(4，1)	(1，4)	(2，2)	(4，1)
D/D/C/D	(4，1)	(2，2)	$\boxed{(3，3)}$	(4，1)
D/D/D/C	(4，1)	(2，2)	(2，2)	(1，4)
D/D/D/D	(4，1)	$\boxed{(2，2)}$	(2，2)	(4，1)

メタゲームの問題点

- PDでは，相手の戦略とは独立に自分の戦略を選択.
  (相手の戦略は分からない)
- 条件付戦略の非対称性
  (戦略の同時選択を否定している！)

4. 繰り返しゲーム（Repeated games）

時間軸の導入：T=1,2,3,…

t 期の利得xの現在価値　$a^t x_t$　$(0<a<1)$

総利得：$\Sigma_{t=1}^{\infty} a^{t-1} x_t$

再び、

$$\begin{pmatrix} (p, p) & (r, q) \\ (q, r) & (s, s) \end{pmatrix} \qquad q>p>s>r$$

- 無条件戦略

  C∞：無条件協力

  D∞：無条件非協力

  (C∞,C∞) はNash均衡ではなく、

  (D∞,D∞) はNash均衡である。

- 条件付戦略　B

  1回目はCを選択し、2回目以降、相手の前回の選択を真似る（しっぺ返し）

しっぺ返しの組合せ（B,B）はNash均衡か？

必要条件-その1

・BとD∞について

T= 1,2,3,.., t_0, t_0+1,…

P1（B）：CCC… C　C　DDDDD…

P2（B）：CCC… C　D　DDDDD…

↑ここで,P2がD∞へ逸脱

BからD∞への逸脱によるP2の利得計算

$p(a+a^2+a^3+\dots) = ap/(1-a)$ ①

$aq+s(a^2+a^3+a^4+\dots) = aq+a^2s/(1-a)$ ②

①≧② ⇔ $a \geqq (q-p)/(q-s)$ [A]

必要条件-その2

もう一つのしっぺ返し　B'

1回目はDを選択し、2回目以降、相手の前回の選択を真似る（もう一つのしっぺ返し）.

・BとB'について

T= 1,2,3,.., t_0, t_0+1,…

P1（B）：CCC… C　C　DCDCD…

P2（B）：CCC… C　D　CDCDC…

↑P2がB'へ逸脱

BからB'への逸脱によるP2の利得計算

$$aq+a^2r+a^3q+a^4r+a^5q+\ldots = aq/(1-a^2)+a^2r/(1-a^2) \quad ③$$

①≧③　⇔　$a \geqq (q-p)/(p-r)$　　[B]

(B,B) がNash均衡⇔ [A] & [B]

χ：任意の戦略とする.

ケース1：逸脱後のχでの最初の選択がCのとき、

T= 0,1,2,.., t_0, t_0+1,…

P1 (B) ：CCC… C　C　CCCCC…

P2 (B) ：CCC… C　C　CCCCC…

↑P2がχへ逸脱

ケース2a：P2がBからχに逸脱後の最初の選択がDのとき、次期のP1の選択はDであり、そのときCを選択するような場合、

T= 0,1,2,.., t_0, t_0+1,…

P1 (B) ：CCC… C　C　DCDCD…

P2 (B) ：CCC… C　D　CDCDC…

↑P2がχへ逸脱　→　[B]

ケース2b：P2がBからχに逸脱後の最初の選択がDのとき、次期のP1の選択はDであり、そのときDを選択するような場合、

$T = 0,1,2,..,\ t_0,\ t_0+1,\ldots$

P1 (B)：CCC… C　C　DDDDD…

P2 (B)：CCC… C　D　DDDDD…

↑P2がχへ逸脱　→　[A]

利得行列が [A] と [B] をみたす場合、(B,B) という戦略の組において、一方的にχ (任意の戦略) に逸脱する誘因はない。

→上のことが言えるための大前提を確認せよ。

フォーク定理

ミニマックス値

x :P1の戦略　y:P2の戦略

$a_i(x,y)$: Piの利得（i＝1, 2）

$\underline{v}_i = min_y\{max_x(a_i(x,y))\}$: Piの**ミニマックス値**

（Piにとっての最低保障される利得）

ミニマックスプロフィール (m_i^i, m_j^i)

$a_i(m_i^i, m_j^i) = \underline{v}_i \quad (i \neq j)$　（i,j＝1, 2）

（Piのミニマックス値が達成されるときの戦略組）

実現可能な利得ベクトルの集合

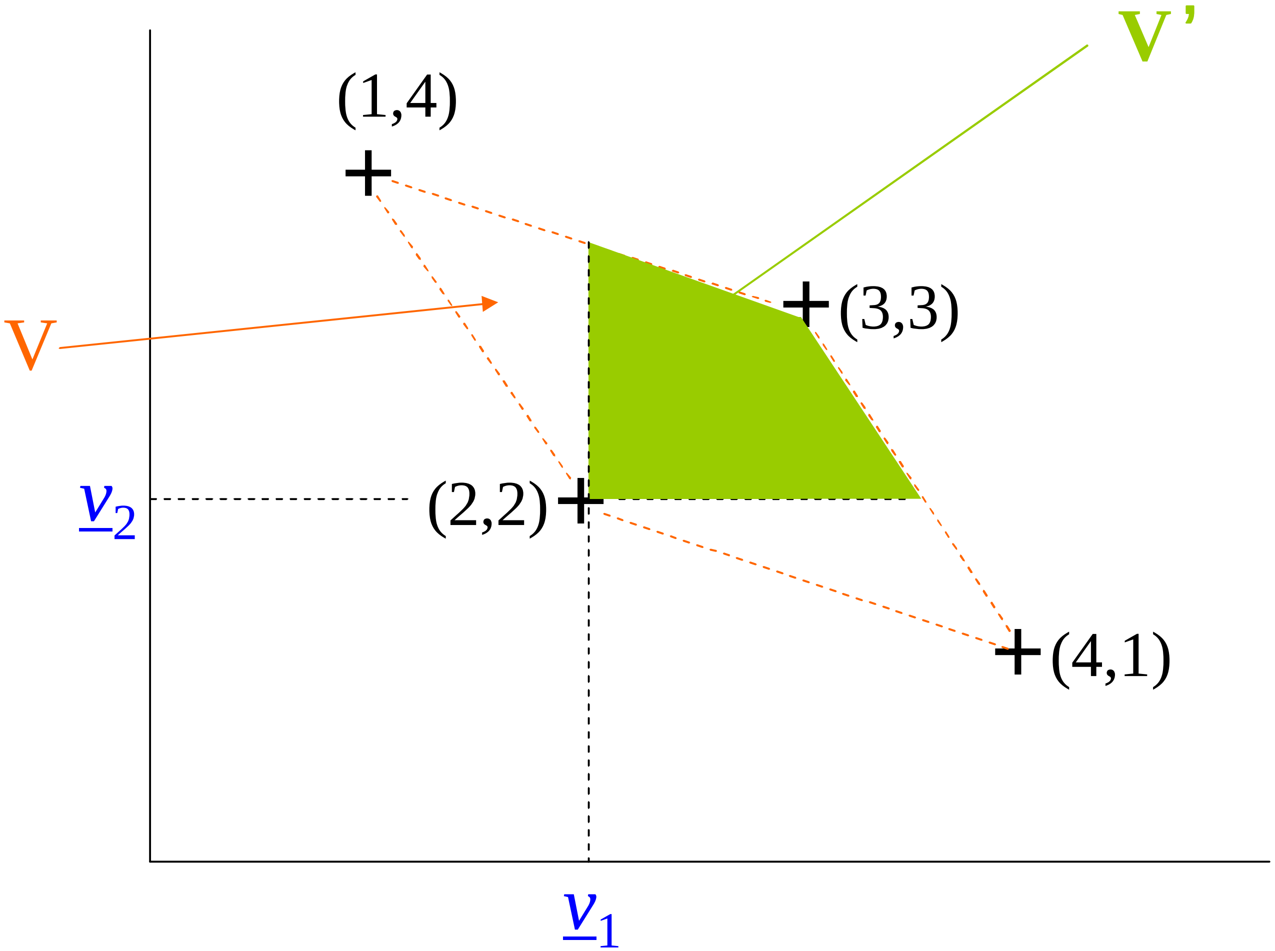
$V = \text{convex hull } \{(v_1,v_2) \mid \exists x,y \text{ s.t. } (a_1(x,y), a_2(x,y)) = (v_1,v_2)\}$

個人合理的な利得ベクトルの集合

$V' = \{(v_1,v_2) \mid v_i > \underline{v}_i \ (\forall i)\}$

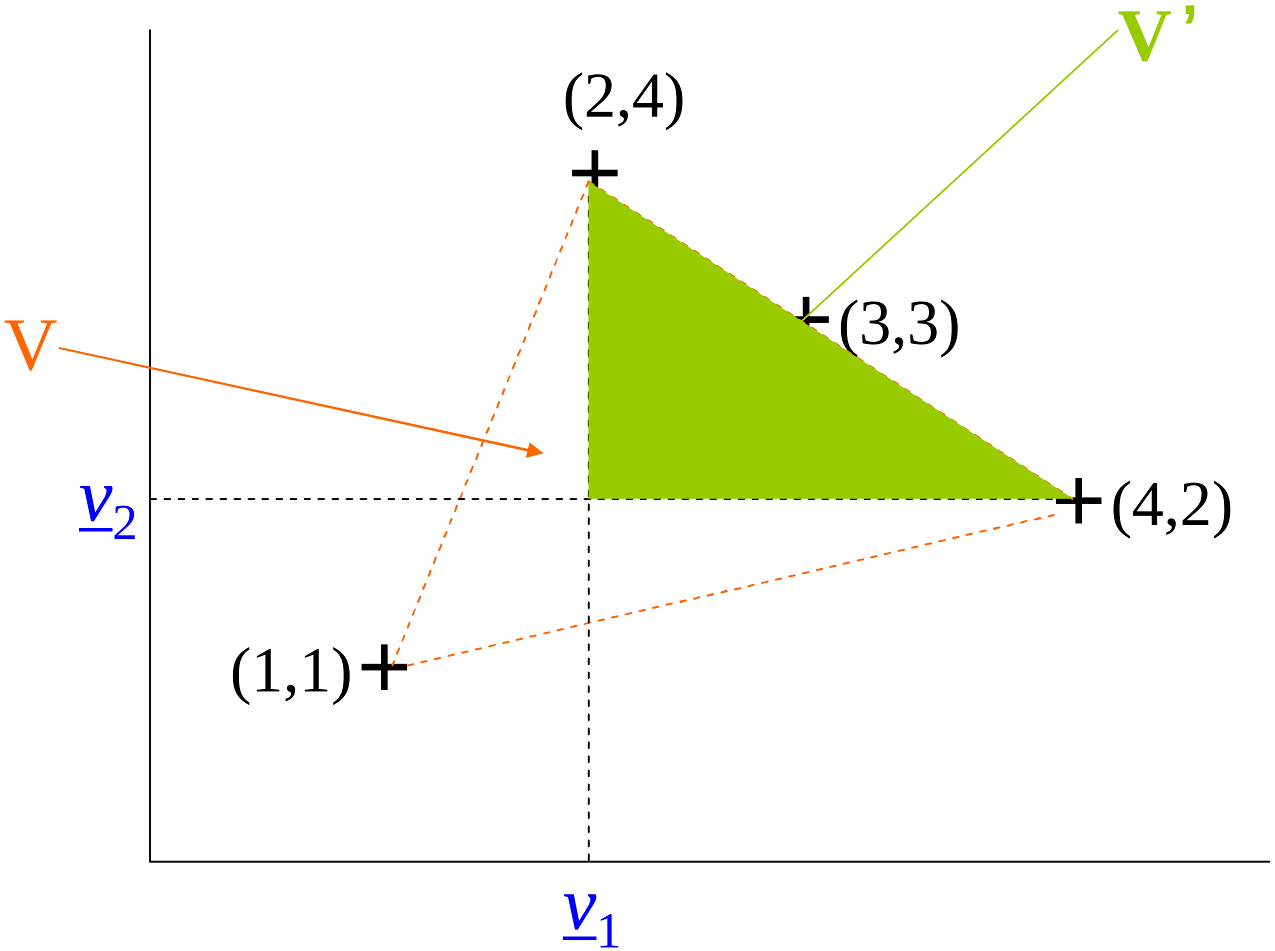
例示－1

囚人のジレンマゲーム(PD)



例示ー2

チキンゲーム



Folk Theorem 1

任意の実行可能な利得ベクトルv^*（$=(v_1{}^*, v_2{}^*)$）が、個人合理的（$v^* \in V'$）なら、ある$\underline{\delta}$が存在して、$\forall \delta \in (\underline{\delta}, 1)$のもとで、$v^*$をもたらすナッシュ均衡が存在する。

$(a_1(x^*, y^*), a_2(x^*, y^*)) = (v_1{}^*, v_2{}^*)$としよう。

（P1の戦略）

P1は最初にx^*をとり、P2 もy^*をとった場合、次回からx^*をとり続ける。もし、P2がt期にy^*から逸脱した場合、P1 は（$t+1$）期以降m_i^jをとり続ける。この場合P2の総利得は、最大で、

$$(1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{t-1})\, v_2{}^* + \delta^t max_y a_2(x^*, y) + (\delta^{t+1}+\delta^{t+2}+\ldots)\, \underline{v}_2$$

$$= \frac{(1-\delta^t)\, v_2{}^* + \delta^t (1-\delta)\, max_y a_2(x^*, y) + \delta^{t+1} \underline{v}_2}{(1-\delta)} \qquad (1)$$

$\underline{\delta}_2$を、$(1-\underline{\delta}_2)\, max_y a_2(x^*, y) + \underline{\delta}_2 \underline{v}_2 = v_2{}^*$となるようにとると、$\underline{\delta}_2 < 1$。（$\because v_2{}^* > \underline{v}_2$）

P2がt期にy^*から逸脱しなかった場合の総利得は、

$$(1+\delta+\delta^2+\ldots+)\, v_2{}^* = \frac{v_2{}^*}{(1-\delta)} \qquad (2)$$

したがって$\delta > \underline{\delta}_2$ならば、（1）<（2）となり、P1の戦略のもとでP2に逸脱する誘因はない。

ミニットペーパー

１．証明を完結せよ。

２．Folk Theorem １に示す戦略の弱点は何か．

Folk　Theorem　２　（Friedman(1971))

（Nash-threat　Folk　Theorem）

均衡状態での利得ベクトルe^*（$=(e_1{}^*, e_2{}^*)$）について、e^*よりも大きい任意の個人合理的な利得ベクトル（$v^* \in V$; $v_i{}^* > e_i{}^*$ $(\forall i)$）なら、ある$\underline{\delta}$が存在して、$\forall \delta \in (\underline{\delta}, 1)$のもとで、$v$をもたらす部分ゲーム完全均衡が存在する。

部分ゲーム完全均衡…

展開形ゲームの均衡戦略が、その部分ゲームに限定してもつねにNash均衡になっている。

（歴史合理性？！）

歴史合理性への懐疑

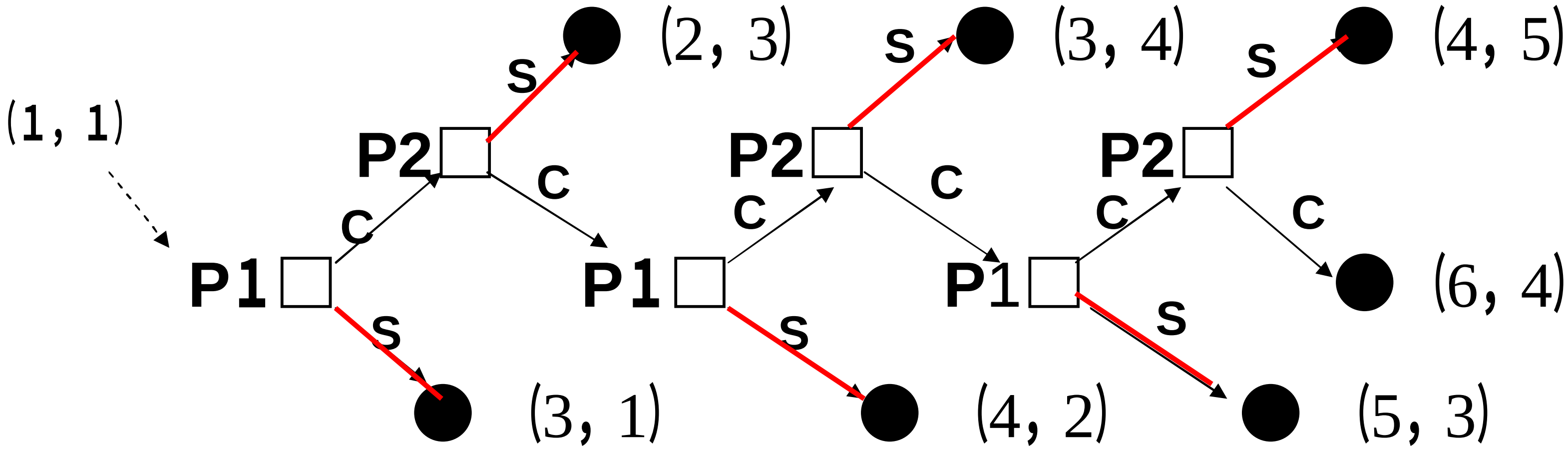
ダイナミックゲーム（展開形ゲーム）

・ムカデゲーム

プレイヤーの選択肢は、C (Continue)か，S(Stop)の２つ．

Continueすると＋１（潜在的），Stopすると＋２，利得が増える．

３レベル



⇒最適戦略　P1が最初にStop　（利得はP1が３、P2が１）