経済と社会

14th Dec., 2009

信念に関する合理性

推論における演繹と帰納の間の橋渡し

狼少年

$\Theta=\{\theta_1, \theta_2\}$　　状態集合（観測不可能）

θ_1：少年はウソをつく性向をもつ．

θ_2：少年は正直な性向である．

$X=\{x_1, x_2\}$　　経験集合（観測可能）

x_1：実際に狼が来た．

x_2：狼は来なかった．

村人たちは，最初は少年の性向は全く分からない．

$$P(\theta_1)=P(\theta_2)=1/2$$

「狼が来た」とウソを言って（出まかせに言って）狼が来ないと，

主観確率P（信念）は変化する．　**…合理的な信念変化とは？**

ベイスの定理

Tomas Bayes (1702-61)

$A_1, A_2, \ldots, A_n$　:n個の排反事象＆$\cup_{i=1}^{n} A_i = X$(全事象)

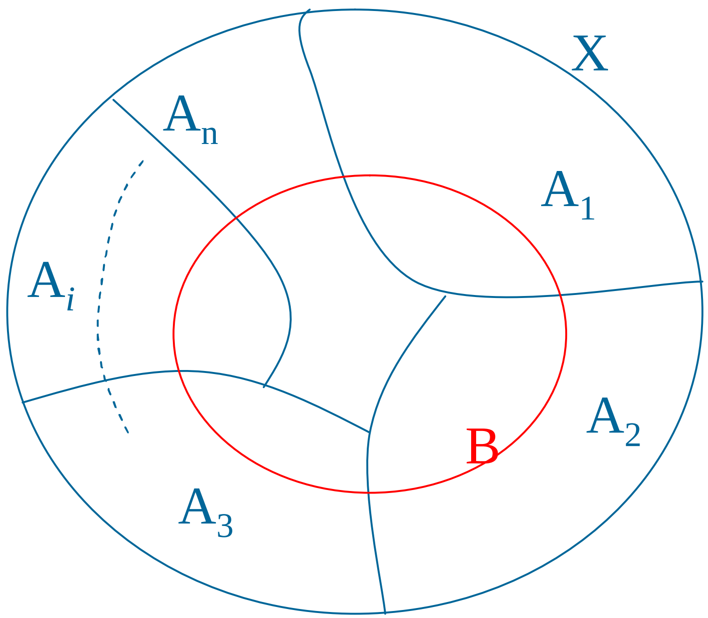
P (A_i) : A_i の生起確率 ($i=1,\ldots,n$)

P (B ｜A_i) : A_iが起ったときのBの条件付確率 ($i=1,\ldots, n$)

このとき、B が起ったときの

A_iの条件付確率 は、

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\,P(B \mid A_i)}{\Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B \mid A_i)}$$



再び、狼少年

状態θと経験 x の関係

Θ ＼ X	狼は実際に来た x_1	狼は来なかった x_2
θ_1 嘘つき	1/3	2/3
θ_2 正直	3/4	1/4

・少年が狼が来た！と言って、狼が実際に来たとき、

$$P(\theta_1 \mid X=x_1) = \frac{P(\Theta=\theta_1)P(X=x_1 \mid \Theta=\theta_1)}{P(\Theta=\theta_1)P(X=x_1 \mid \Theta=\theta_1)+P(\Theta=\theta_2)P(X=x_1 \mid \Theta=\theta_2)}$$

$$=(1/2*1/3)/\{(1/2*1/3+1/2*3/4)\}=\mathbf{4/13}$$

同様に、$P(\theta_2 \mid X=x_1) =$ **9/13**

・少年が狼が来た！と言って、狼が来なかったとき、

$P(\theta_1 \mid X=x_2) =$ **8/11**

$P(\theta_2 \mid X=x_2) =$ **3/11**

⇒確かめよ！（ミニットペーパー）

協力ゲームの理論

協力ゲームとは

提携（結託）形成の理論

非協力ゲームの理論との違い

競争場面の違いと思想面での違い

特性関数による定式化

プレイヤーの集合　$N=\{1,2,..,n\}$

特性関数　$v:2^N \to R$（実数の集合）

・$\forall S,T \in 2^N;\ S \cap T = \phi \to v(S \cup T) \geqq v(S) + v(T)$　（優加法性）

・$\exists S,T \in 2^N;\ S \cap T = \phi\ \&\ v(S \cup T) > v(S) + v(T)$　（本質性）

・$\forall S \in 2^N;\ v(S) = v(N-S) + v(N)$　（定和性）

通常は優加法的、本質的な特性関数を考える！

協力ゲームの標準化

本質的ゲームは標準化可能

標準化された特性関数v'

$\forall S \in 2^N$ ； $0 \leqq v'(S) \leqq 1$, $v'(\{i\})=0\ (\forall i \in N)$, $v'(N)=1$

v から v' へ

$$v'(S) = \frac{v(S) - \Sigma_{i \in S} v(\{i\})}{v(N) - \Sigma_{i \in N} v(\{i\})}$$

単純ゲーム

$\forall S \in 2^N$ ； $v(S)=0$ または 1

単純ゲームは投票ゲームともいう。（何故か？）

3人協力ゲームの3つの例

N＝{A,B,C}

多数決ゲーム

v (A)= v (B)=v(C)=0

v (AB)= v (BC)=v(CA)=1

v (ABC)=1

拒否権ゲーム

v (A)= v (B)=v(M)=0

v (AB)= 0, v (BM)=v(MA)=1

v (ABM)=1

満場一致ゲーム

v (A)= v (B)=v(C)=0

v (AB)= v (BC)=v(CA)=0

v (ABC)=1

協力ゲームの均衡概念

$N=\{1,2,..,n\}$　**配分** (allocation)　$x=\{x_1,x_2,.., x_n\}$

合理的な配分とは？

集団合理性：$\Sigma_{i\in N} x_i = v(N)$　$(\Sigma_{i\in N} x_i = 1)$

個人合理性：$\forall i\,;\, x_i \geqq v(\{i\})$　$(\forall i\,;\, x_i \geqq 0)$

安定な配分とは？

配分間の支配関係 (domination)

配分x**が配分**y**を提携**S**によって支配する**　⇔

$\forall i\in S;\, x_i > y_i$ & $\Sigma_{i\in S} x_i \leqq v(S)$

コア (core)：**如何なる提携によっても支配されない合理的な配分の集合**

$\forall S\in 2^N;\, v(S) \leqq \Sigma_{i\in S} x_i$

3人協力ゲームでの安定な配分

標準化されたゲーム

$x = \{x_A, x_B, x_C\}$

x_A, x_B, x_C**は**x**から直線**BC,CA,AB**への**

垂線の足の長さ

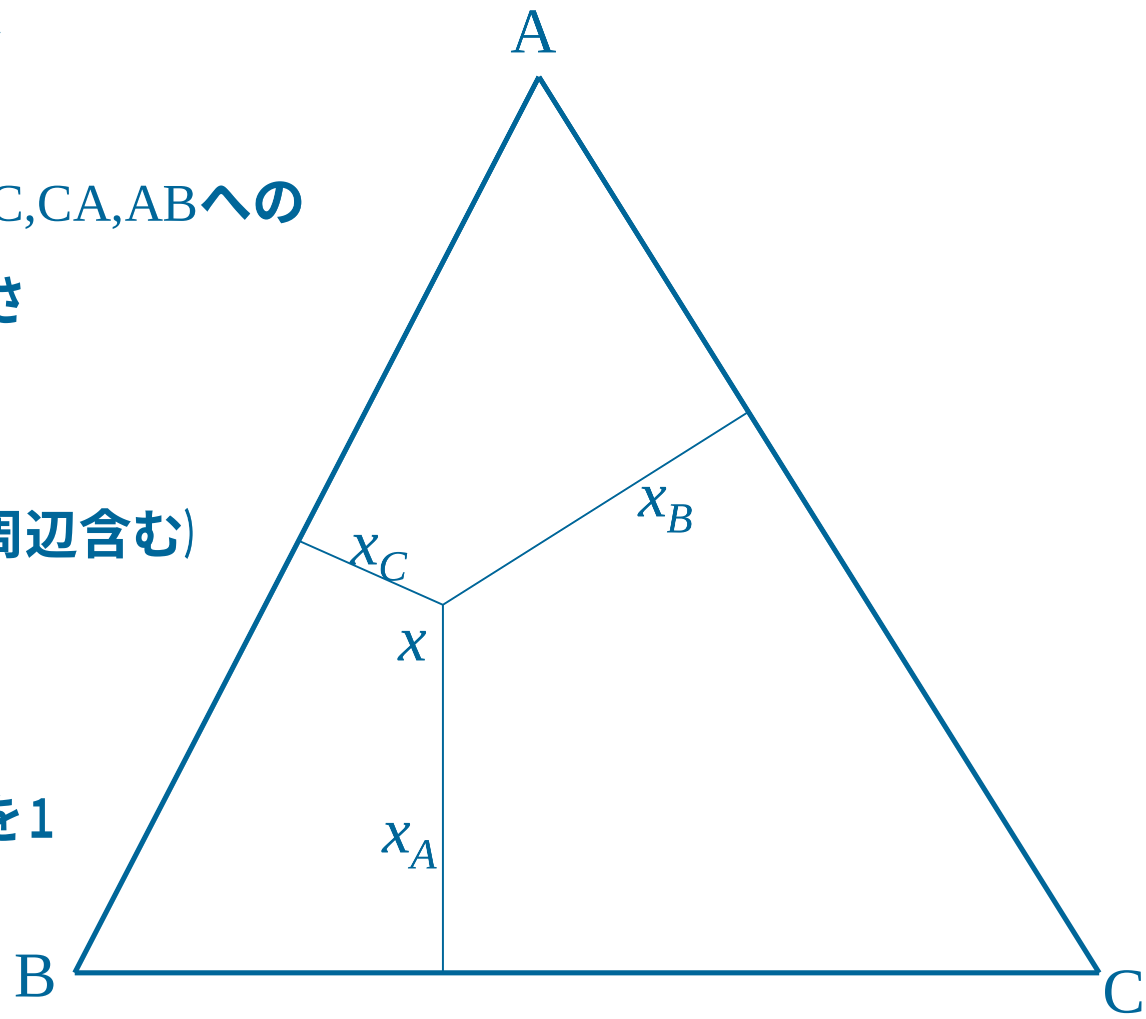
個人合理的な配分

⇔ x**が**△ ABC**の内部（周辺含む）**

集団合理的な配分

⇔$x_A + x_B + x_C = 1$

⇔**正三角形**ABC**の高さを1**



3人協力ゲームのコア (その1)

3人多数決ゲーム

$v(\mathbf{AB}) \leqq \Sigma_{A,B}\, x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_A + x_B \geqq 1$

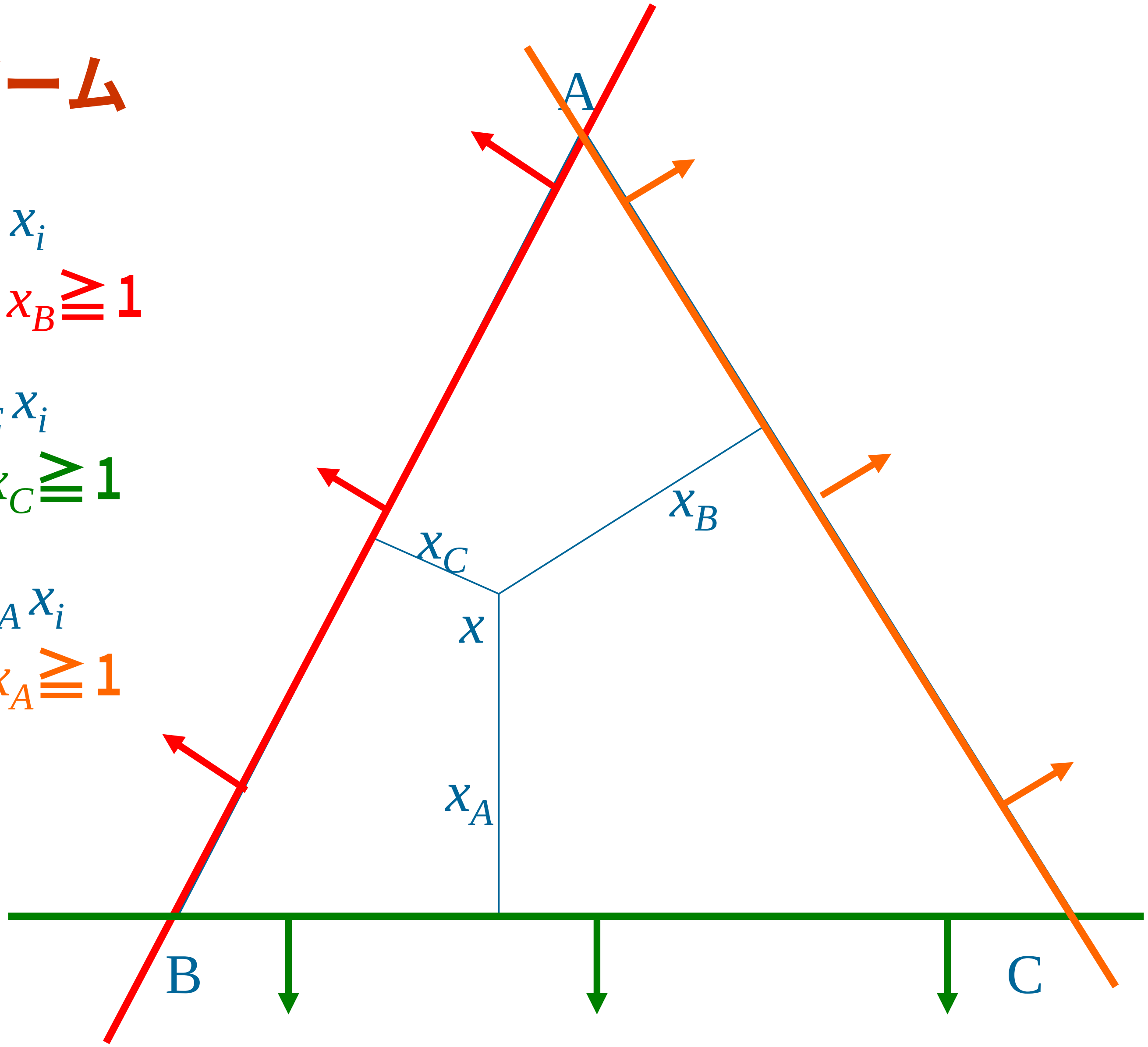
$v(\mathbf{BC}) \leqq \Sigma_{B,C}\, x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_B + x_C \geqq 1$

$v(\mathbf{CA}) \leqq \Sigma_{C,A}\, x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_C + x_A \geqq 1$

コア＝φ



3人協力ゲームのコア（その2）

3人拒否権ゲーム

$v(\mathbf{AB}) \leqq \Sigma_{A,B}\, x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_A + x_B \geqq 0$

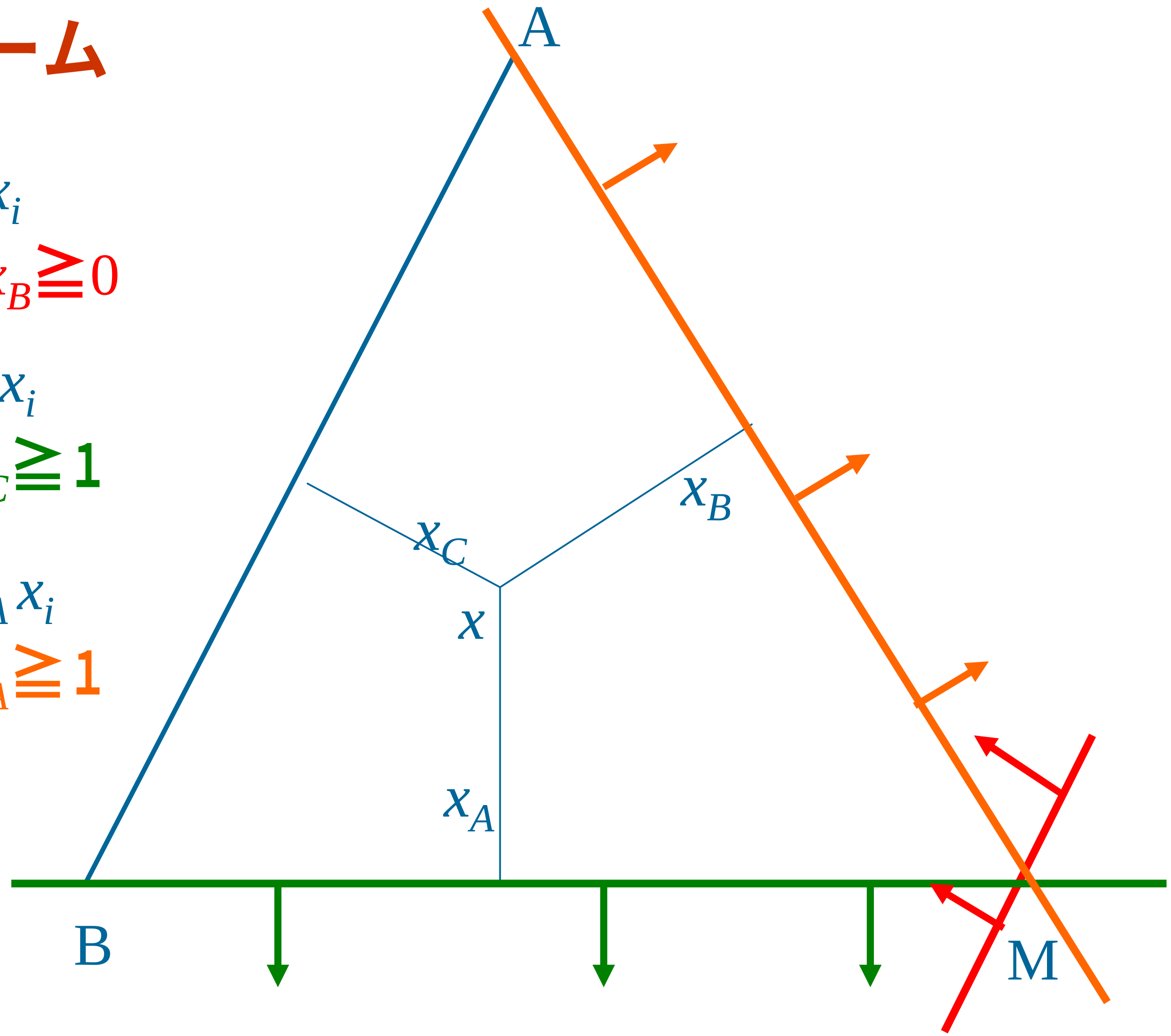
$v(\mathbf{BM}) \leqq \Sigma_{B,C}\, x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_B + x_C \geqq 1$

$v(\mathbf{MA}) \leqq \Sigma_{C,A}\, x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_C + x_A \geqq 1$

コア＝{M}



3人協力ゲームのコア（その3）

3人満場一致ゲーム

$v(\mathbf{AB}) \leqq \Sigma_{A,B}\, x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_A + x_B \geqq 0$

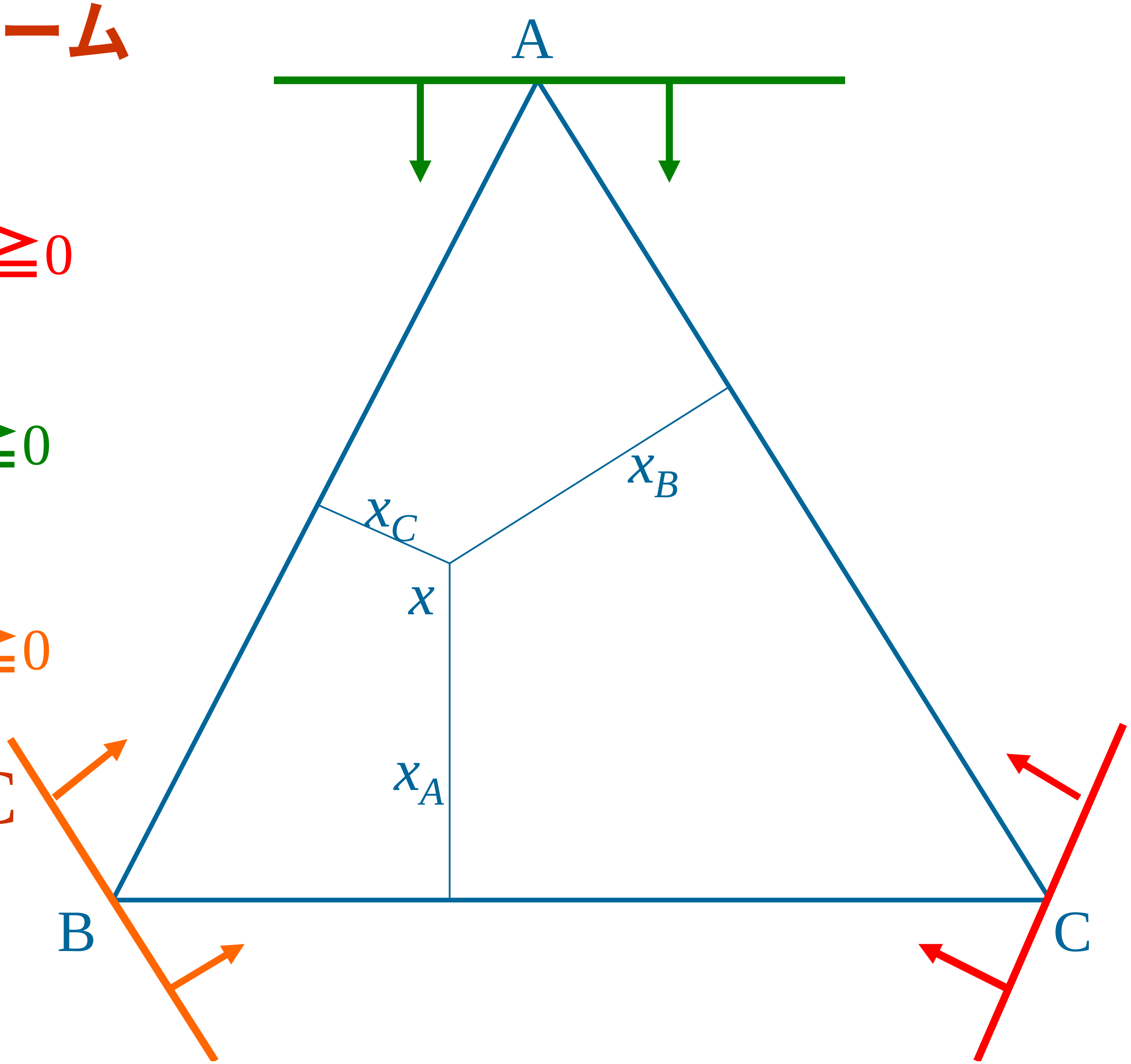
$v(\mathbf{BC}) \leqq \Sigma_{B,C}\, x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_B + x_C \geqq 0$

$v(\mathbf{CA}) \leqq \Sigma_{C,A}\, x_i$

$\Leftrightarrow \quad x_C + x_A \geqq 0$

コア＝△ABC



プレイヤーの潜在力指標

プレイヤー i の貢献性

$\forall S \in 2^N$ ； $v(S\cup\{i\}) = v(S)$

i はnull player

プレイヤー i,j の代替性

$\forall S \in 2^N$ ； $v(S\cup\{i\}) = v(S\cup\{j\})$

i, j は互いにsubstitutional player

シャプレイ値 sv_i

貢献度が0なら潜在力は0　$sv_i = 0$

代替可能なプレイヤーの潜在力は等しい　$sv_i = sv_j$

効率的な値の付与：$\Sigma sv_i = v(N)$

ゲーム加法性をみたす：　$s(v+w)_i = sv_i + sw_i$

⇒ 以上の4条件をみたす値は唯一に定まる（シャプレイ値）

シャプレイ値の計算

$$sv_i = \frac{1}{n!}\left[\Sigma_{r \in R}\, v(S_i \cup \{i\}) - v(S_i)\right]$$

where

R ：N上で定義されるn！個の順列のすべて

S_i :順列r において i に先行するプレイヤーの集合

3人ゲームのシャプレイ値

v:多数決、w：拒否権、z：満場一致

$sv_A = sv_B = sv_C = 1/3$

$sw_A = sw_B = 1/6 \quad sw_M = 2/3$

$sz_A = sz_B = sz_C = 1/3$

シャプレイ値の問題点

1．配分の競争安定性に欠ける

シャプレイ値はコアが存在してもコアに含まれない。

2.配分における手続きの安定性に欠ける

部分協力ゲームとの非整合、配分の手続きに難点

3．プレイヤーの団結性 (Solidarity)に影響される

プレイヤーが組織になっている場合 (プレイヤーが分割可能な場合)、組織への配分が非整合

仁 (Nucleolus)の登場

最大不満最小化の原理

$$B=\{x=\{x_1, x_2,\ldots,x_n\} \mid x_i \geqq v(\{i\}),\ \Sigma_{i\in N} x_i = v(N)\}$$

効率的配分の集合

$$E(x;S) = \Sigma_{i\in S} x_i - v(S) \Longrightarrow$$ **満足レベル**

$$min_{S \in 2N,\, S\neq N}\ E(x;S) \to maximize \quad w.r.t.\ x$$
$$s.t.\ x \in B$$

仁はコアが空集合でなければ、コアに含まれる。
仁は唯一に定まる(若干の修正要)
仁は手続き的に安定である。