
研究論文

Towards Formalization of Rational Voting Models on Large Electrates

本論文は複数レフェリーの審査に基づく論文審査小委員会の審査を受けたものです。

大選挙区での投票参加モデルの 定式化に関する研究

東北大学農学部 木谷 忍

ABSTRACT

Since Downs (1957) proposed a rational voting model, which has been used to explain the statistical relationship between closeness of elections and levels of their turnouts, many articles have pointed out that discussions on the model couldn't make eligible voters have enough incentive to go to their polling places (called the paradox of not voting).

There has been many kinds of models proposed by the way of modifying the Downs model. It seems, however, that most of them couldn't give solutions to what makes voters lead to polls yet.

At first, this paper surveys some typical attempts to the paradox, and indicates their difficulties to resolve it. Secondly, the paper gives an framework on voter models where the electorate would be supposed to be sufficiently large such as general elections. The framework here is based on the model proposed by Schwartz T.(1987) who proposed an additive utility model on some sub-electrates, and enables us to analyse when an incentive of an eligible voter becomes maximized with respect to his subjective expectation and certainty on the number of votes that would be obtained.

key words : rational voting model, the paradox of not voting, large electorate

1. はじめに

Downs (1957) は、民主主義的政治システムでの政党と有権者を、各々の効用の最大化を目的として行動する合理的選択行動としてモデル化した。すなわち政党は公共財の供給者として有権者はその需要者とみなし、政治学の分野に経済学モデルによる分析枠組みを提案したのである。このような考えは政治学を陳腐化するという批判もあるが、小林 (1988) も述べているようにスケール

の大きなモデル構築という点で発展性を秘めた大胆なアプローチと言えよう¹⁾。本論では、比較的大きな選挙区での選挙に焦点をあて、有権者の投票参加モデルについて考える²⁾。

2. ダウنزの投票参加モデルと 本研究の目的

2-1 ダウنزの投票参加モデル

ダウنزの投票参加モデルとは次のようなモデル

ルである。

$$R = pB - C \quad (1)$$

ここで、 R は投票の期待効用、 p は一票が選挙結果に影響を及ぼす確率、 B はある有権者の好む候補者が当選した場合と落選した場合のその有権者にもたらす効用差、 C は投票コストである。 C は投票所までの所要時間や労力など正のコスト C^+ と、投票参加から得られる満足、たとえば政治参加への義務感の達成や知人との接触などを含めたイベントとしての楽しさなど負のコスト C^- の差として定義している($C = C^+ - C^-$)³⁾。ここで、『無投票のパラドックス』は次の様な論理である。まず、 $C > 0$ とする。(そうでないと必ず投票することになる!) 大選挙区では、 B が大きくてもそれに比して p は殆ど0であると考えられる。したがって、 $R < 0$ となって、投票することは非合理的な行動となる。しかるに、『人はなぜ投票に行くのか』。ここで注意すべきことは、これはいわゆる論理的矛盾ではなく、モデルの非妥当性もしくは変数の見積りの甘さをいっている。本論では後者の立場に焦点をあて、合理的投票参加モデルそのものを疑うことはしない。この場合でも、例えば $C \leq 0$ である有権者が多い、つまり多くの有権者は投票を楽しんでいると仮定さえすればパラドックスは解消される。このように、有権者にとって pB は小さく、彼らの政治参加意識はほとんど儀礼的なものと考えてよいのだろうか。

2-2 無投票のパラドックスの論点

橋本(1994)は最近の日本での選挙において、『人はなぜ投票に行かないか』という逆の視点から、政治不信や既成政党の墮落などとは関連性がなく、経済全般に対する自己評価の意識と関連があることを計量的手法によって確認したと述べている。これは、投票参加が C よりも B の影響が大、すなわち政治参加への義務感の薄れよりも、投票による経済状況改善への期待感が薄れたことを意味している。

また、 pB による投票参加の影響は、過去の日本の参院選の地方区(選挙区)と全国区(比例区)での有効投票数の差に着目したときに明らかになる

表1 日本の参議院選の区別有効投票数(千票)

年	投票率	地方区	全国区	備考
'47	60.9	21,896	21,346	平日選挙
'50	71.7	28,749	27,681	
'53	63.2	28,011	26,874	
'56	62.1	29,686	28,609	
'59	58.7	30,129	29,420	平日選挙
'62	68.2	36,312	35,756	
'65	71.1	37,665	37,269	
'68	68.9	43,260	43,074	
'71	59.3	40,700	39,644	衆参同日選
'74	73.2	53,456	52,583	
'77	68.5	51,799	50,055	
'80	74.6	56,701	55,958	
		選挙区	比例区	
'83	57.0	46,200	46,537	比例代表制導入 衆参同日選
'86	71.4	57,938	57,362	
'89	65.0	56,900	56,171	
'92	50.7	45,383	44,948	

(朝日新聞縮刷版より)

注：投票率は地方区(選挙区)のもの

(表1)。これらの間の投票コストの差は小さく、投票参加が pB に大きく影響すると考えられるからである。実際、無効票などを含む単純投票数では地方区(選挙区)の方が、平均0.01%程度高いだけであるが、有効投票数では平均2%も高く、過去16回の選挙で比例代表制導入直後の'83年の選挙を除いて、すべて地方区(選挙区)の方が上回っている。有効投票数の差を統計的に調べるために、有権者の数の増加がかなり大きいこと、各選挙の投票率の差が大きいことを考えると、全体の分散が大きくなって平均値の差の検定は不都合である。そこで、有効投票数の差の符号(全国区-地方区)と差の大きさによる順位積和であるSWを検定統計量としたノンパラメトリック検定⁴⁾を行なう。それによれば $SW = 2$ であり、正規近似による p 値は0.0004となり、統計的に有意に地方区(選挙区)のほうが有効投票数が多いと結論づけられる。唯一、'83年は逆転するが、これは比例代表制導入による興味が影響しているものとも考えられよう。

地域政治に係わる問題と国政レベルの問題では、有権者にとっては前者の方を重視することはごく

自然なことであり、これは地方区（選挙区）での B は全国区（比例区）のそれより大きいことを意味する。また、また p についても有権者数に対する改選数が全国区の方が少ないため、一票の選挙結果への影響は全国区の方が小さい。また、比例区では政党を選ぶためにさらに小さい。このように考えると、参院選での両区での有効投票数の差は pB によって説明されるべきことになる。

さらに、選挙区が比較的大きい場合でも接戦の選挙において投票率が上がるという傾向は昔から知られており⁵⁾、投票の期待効用 R のなかで pB は相当量の大きさをもつと同時に R に影響を与えるだけの変動をもつことが必要である。しかし他方で、一人の有権者が投票によって政治を自分の都合のよい方に動かして得られる期待利益 pB が意味のある程度に大きくかつそれが選挙毎に大きく変動するとは考えられないのである。これが無投票のパラドックスの論点である。

2-3 本研究の目的

この無投票のパラドックスを巡って、ダウنزモデルを前提としてそれが解決可能かどうかについて、これまで数多くの検討がなされてきた。本論では、最初にそれらのいくつかを紹介した上でそれらの問題点を指摘し、投票参加モデル構築への一つの枠組みを、投票による投資的価値の分析を念頭に提案することを目的とする。ここで提案する枠組みもダウنزモデルを基本思想においた合理的選択行動を前提としている。また、議論の複雑さを避けるため2候補者選挙モデルを考えていくが、後で述べる効用連続型モデルでは、適当な効用関数が想定されれば、多候補者選挙も含めることができる。

3. パラドックスの解決に向けて

3-1 p の見積りについて

1人の投票が選挙結果に影響を及ぼす確率は客観的確率であるが、実際には有権者は主観確率を考えるべきという立場をとろう。 p は選挙区の大きさ n （ここでは n は有効投票数とする）に依存す

ることは明らかであるが、どのように依存しているかについては多くの議論がなされてきた。以下2候補者 A_1, A_2 の選挙モデルを考える。最初に、各有権者の票の重みの平等性を考えて $p = n^{-1}$ と想定し、これを検討する。ここで、ある有権者は他の有権者の候補者 A_1 に投票する確率 s （主観確率）を想定しているものとする。候補者 A_1 の得票 k が2項分布 $b(k; n, s)$ に従うとすると、彼の一票が選挙結果を決定づけるほどの接戦になる確率は、

$$p = b(n/2; n, s) = {}_nC_m p^m (1-p)^m \quad \left(m = \frac{n}{2}\right) \quad (2)$$

である⁶⁾。このとき、次の命題が成り立つ。

【命題1】 (Rae, D. (1969))

(2) の p の s に関する最大値 p^* について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^* n^{1/2} = (2/\pi)^{1/2}.$$

【証明】 p は $s=1/2$ のとき最大であり、 $p^* = {}_nC_m 2^{-n}$ 。

2項分布は n が大きいとき、標準正規分布と考えることができるから⁷⁾、 ${}_nC_m 2^{-n} \sim 2n^{-1/2} (2/\pi)^{1/2}$ （ $\sim$ は $n \rightarrow \infty$ のとき両辺の比が1に近づくことを示す）。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^* n^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^{-1/2} (2/\pi)^{1/2} n^{1/2} = (2/\pi)^{1/2} \quad \blacksquare$$

上の命題は、十分大きな選挙区において、他のすべての有権者の2候補者への投票が等確率で行なわれると考える有権者は、 $p > kn^{-1/2}$ （ k は定数）となり、 n^{-1} のオーダーより大きくなることを示している。

次に、 s を確率変数 S としてこれが密度関数 f （連続関数）に従うとする。このとき、有権者の接戦となる主観的確率 p は次のように計算される。

$$p = {}_nC_m \int_0^1 s^m (1-s)^m f(s) ds \quad (3)$$

【命題2】 (Good, I. J. et al (1975))

$$(3) \text{ において、} \lim_{n \rightarrow \infty} p n = \frac{f(1/2)}{2}$$

【証明】 s の関数 $4^m s^m (1-s)^m$ は、 $[0, 1]$ において、 $s=1/2$ で1、その他で0となる不連続関数に L_1 収束⁸⁾する。したがって十分小さな正数 ε に対して、

$$\int_0^1 s^m (1-s)^m f(s) ds \sim f(1/2) \int_{1/2-\varepsilon}^{1/2+\varepsilon} s^m (1-s)^m ds \sim f(1/2) \int_0^1 s^m (1-s)^m ds \quad (a)$$

ベータ分布の関係⁹⁾より、

$$\frac{1}{{}_nC_m} = (2m+1) \cdot \frac{m! m!}{(2m+1)!} = (2m+1) \int_0^1 s^m (1-s)^m ds \quad (b)$$

(3) と (α), (β) より,

$$pn = 2m \int_0^1 s^m (1-s)^m f(s) ds / (2m+1) \int_0^1 s^m (1-s)^m ds \\ \sim \int_0^1 s^m (1-s)^m f(s) ds / 2 \int_0^1 s^m (1-s)^m ds \sim f(1/2) / 2$$

命題2より, p が大きくなるのは $f(1/2)$ が大きくなる
ときであり, これは他の有権者が確率 $\frac{1}{2}$ で投票
する確信が大きいときであることを意味し
 $f(1/2) > 2$ であるなら, p の大きさは n^{-1} より大きい。
しかし, この確信の大きさに関係なく p は n^{-1} に比
例することも示され, 主観確率を確率変数とした
場合は p の見積りが小さくなる。

3-2 有権者の学習過程

上のように, 主観確率について確率変数 S を与
えることは p の見積りを後退させ意味のないよう
にみえるが, 実は別の点を考えてのことである。
それは, 有権者の学習過程, すなわち他の有権者
の投票結果をもとに主観確率 s を改良するような
投票参加モデルの構築である。実際の投票では,
他の有権者の投票結果は当該選挙中には得られな
いし, またマスコミ等からの投票動向の情報で代
替するにしても, 一選挙中で S についての学習を
考えるには少々無理が感じられる。しかし, 最近
の選挙のように自民対非自民なる構図の選挙が繰
返し行なわれる状況を考えると, ある地区の選挙
での s (自民党候補者への主観投票確率) は, その
地区の以前の選挙の投票結果から有権者が学習す
ることは十分に考えられる。

Good, I. J. et al (1975) は, f にベータ分布を
仮定して, このような繰返し投票参加をモデル化した。

$$f(s) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} s^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} \\ (B(\alpha, \beta) \text{ はベータ関数}^{9)}) \quad (4)$$

ベータ分布は2項分布の共役事前分布¹⁰⁾であり,
 r 人の有権者のうち候補者 A_1 に r 票, 候補者 A_2 に
 $r-r$ 票が投ぜられたとの情報を得たとき, S の確率
分布は (4) 式の α, β をそれぞれ $\alpha+r, \beta+r-r$ に置
き換えたものになる。

ここで, S の期待値 $E(S)$ と分散 $V(S)$ は

$$E(S) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad V(S) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \quad (5)$$

であり, 接戦を繰返す選挙では, (5)において $\alpha =$

$\beta \rightarrow \infty$ とすることにより, 主観確率が $\frac{1}{2}$ に収束し
て (期待値 $\frac{1}{2}$, 分散 0), Raeの結果に正当性を与
えることになる。

以上をまとめると, p が n の -1 乗に比例するの
は, 投票の動向がよく分からない場合であり, 接
戦となるという情報によって, 他の有権者の A_1 候
補者への投票確率が $\frac{1}{2}$ であると確信をもつにつれ
 n の $-\frac{1}{2}$ 乗に比例することになる。このことは, 接
戦の選挙での投票率の上昇を説明することになる
が, n の $-\frac{1}{2}$ 乗に比例するとしても, まだまだ p が
十分に大きいとは言えそうもない。

3-3 不完全情報ゲームとしての投票参加モデル

ゲーム理論からの無投票のパラドックスの解
消の方法は非常にテクニカルである。つまり, 投
票率は均衡点の現れであると考える。

表2 有権者 i の利得 (T_i)

状態	$N_1^{-i} = N_2^{-i}$	$n > n$	$n < n$
投票	$1 - C_i$	$1 - C_i$	$-C_i$
棄権	0	1	0

考えるゲームは, n 人非協力ゲームである。2候
補選挙において, n 人の有権者を選好する候補者別
に2チーム T_1, T_2 に分ける。 n_1, n_2 を T_1, T_2 内の
有権者数とする ($n_1 + n_2 = n$)。 n 人の戦略は $(q_1,$
 $q_2, \dots, q_n)$ であり, q_i は有権者が選好する候補者に
投票をする確率である。このゲームは同時手番で
あるという意味で不完全情報ゲームである (表2)。
各有権者 i について N_1^{-i}, N_2^{-i} を i を除いた T_1, T_2
の投票数とすると, i の投票参加モデルは,

$$R_i = P(N_1^{-i} = N_2^{-i}) \cdot 1 - C_i \quad (6)$$

である¹¹⁾。ここで, 簡単のため $B = 1$ とし, C_i も
 B の単位で測られているものとする。

$(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ が, $0 < q_1^* < 1$ のもとで混合ナ
ッシュ均衡¹²⁾であるための必要十分条件は, 投票
と棄権が無差別になる, すなわち,

$$C_i = P(N_1^{-i} = N_2^{-i})^{13)} \quad (7)$$

が成り立つことである。

単純な例として対称ゲーム,
 $n_1 = n_2 = n, C_1 = \dots = C_n = C (0 < C < \frac{1}{2})$ を考えると

き、 $q^* (=q_1^* = \dots = q_n^*)$ は、 n が十分大きければ0と1に限りなく近づく (Palfrey, T. R. et al (1983))。これは、全くの接戦の状況で、投票コストも一定とすれば、均衡点は全員投票かもしくは全員棄権のいずれかである。全員投票は確かに均衡点だけれどもそれは社会的ジレンマの蟻地獄的均衡点である。2チームが協力できるなら全員棄権という「より良い」状態に移ることができる。

このようなパラドックスの解決は、相手候補者を選好する有権者の出方による最悪の状況を避けるために投票が行われていると説明することになる。当然これには反論があって、たとえば有権者の効用差 B や投票コスト C については一定の不完備な情報をもっていることが挙げられる。つまり、このゲームは不完備情報ゲームでもある。Palfrey, T. R. et al (1985) はこの点を踏まえ、他の有権者の投票コスト C を確率変数とし、分布関数 $F(c)$ を与えることによって (6) を拡張した。(Bは1としているため、 B の不完備情報は C に含まれていることに注意)

上の単純な例において考える。各有権者は他の有権者が投票コストの限界値 c' をもち、 $F(c)$ に従い c' より小さい投票コストが実現すると投票、大きい投票コストが実現すると棄権するというベイズ型の決定ルールをもつと仮定する。

このとき、 c^* がベイズ均衡点¹⁴⁾であるための必要十分条件は、

$$c^* = P(N_1^{-1} = N_2^{-1}) \quad (8)$$

をみたすものである。

[命題3]

各有権者は自分のコスト c がベイズ均衡点 c^* より小さいとき投票する。

[証明]

有権者 i が投票するのは、期待利得が正、すなわち

$$P(N_1^{-1} = N_2^{-1})(1-c) - (1 - P(N_1^{-1} = N_2^{-1}))c > 0$$

のときであり、これは次と同値である。

$$P(N_1^{-1} = N_2^{-1}) - c > 0 \Leftrightarrow c^* > c. \quad \blacksquare$$

上の命題から $q^* = F(c^*)$ となり、上の結果と合せるとコストが0でない限り、十分大きな n について $q^* = 0$ となる(図1)。 $q^* = 1$ は投票コストの足並

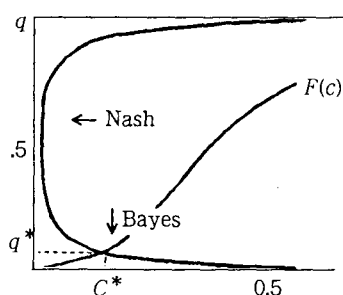


図1 ナッシュ均衡点とベイズ均衡点

が揃って始めて達成される均衡であり、足並がぐずれ可能性があれば均衡点になり得ないことを示している。以上により、ゲーム論的な無投票のパラドックスの解決は失敗していると言わざるを得ない。

3-4 ミニマックスリグレット型投票参加モデル

Ferejohn, J. A., et al (1974, 1975) のミニマックスリグレット方式¹⁵⁾の投票参加モデルによる投票参加の解決は、いくつかの点で疑問視される。この方式による解決を単純に述べると、投票するのは投票しないことによる後悔を最小にするためであると説明するものである。疑問点の第一には、ある候補者の当落による有権者の効用差が、後悔に値するほど大きいかどうかという点である。期待効用が負であっても万が一の効用差が大きい場合、例えば生命保険に入るとか宝くじを買うなどの意思決定はミニマックスリグレット方式で説明されようが、投票参加では考えにくい。第二に、この方式では接戦による投票率の増加が全く説明できない。さらに、これは合理的選択行動、すなわち R の最大化としてのダウンズモデルが妥当しないとしてのパラドックスの解消であり、本論での変数の見積りの甘さを追及する立場と異なるものである。

4. 効用連続型の投票参加モデルの構築

4-1 効用の線形加算的モデル

ダウンズモデル (1) は、図2のような展開図で表すことができる。 p_1 は p_2 よりちょっとだけ大き

選挙結果(確率)		効用
投票	勝利(p_1)	$\rightarrow B-C$
	敗北($1-p_1$)	$\rightarrow -C$
棄権	勝利(p_2)	$\rightarrow B$
	敗北($1-p_2$)	$\rightarrow 0$

図2 投票者の意思決定問題I

く、この差が投票者の選挙結果への影響を示す。投票した場合の期待利得 R_v と棄権した場合の期待利得 R_A の差 R は、

$$R = R_v - R_A = (p_1 - p_2)B - C \quad (9)$$

である。本論での投票参加モデルは、図2の問題を次の2つの面から修正する。

シュワルツ(Schwartz, T. (1987))は部分選挙区概念を持ち出して pB を次のように考えた。有権者は、大選挙区での選挙においても票は地区毎に集計されるため、全体での選挙結果とともに地区(部分選挙区)での結果にもおおいに興味があるというのである。さらにシュワルツは、部分選挙区は制度上の集計単位としての地区だけでなく、社会階層、宗教、年齢層、あるいは小さな地域社会まで1つの選挙区と考えられると言及した¹⁶⁾。シュワルツモデルを定式化すると次のようになる。投票者は n 個の部分選挙区(全体の選挙区も含む)をもち、各 i 部分選挙区での選挙結果に影響を与える確率を p_i 、投票する候補者が i 選挙区で‘当選’した場合と‘落選’した場合の投票者に与える効用差を B_i とすると、

$$R = \sum_{i=1}^n p_i B_i - C \quad (10)$$

が投票参加モデルである。当選した候補者は、長期的な戦略を考えるなら各部分選挙区の票を意識しながら政策をすすめることになり、たとえば i 部分選挙区で敗れている場合、 i 部分選挙区では相手の候補者よりの政策を考慮に入れることは大いに考えられる。すなわち、投票者は部分選挙区での勝敗も効用差をもつのである。ここで注意すべきことは p_i が大きい部分選挙区は規模の小さく、そこでの B_i は小さいと考えられるから(10)式の投資的価値の各項は非常に小さいと考えられ、シュワルツによる無投票のパラドックスの解決は部分的なものようである。しかし、接戦の主観確率

s_i を部分選挙区毎にもつのではなく、それらの平均的な値としてもつならば、さらに投資的価値が増えることが次の命題により示される。

[命題4] $\{s_i\}, \{b_i\}$ を大きさの同じ有限増加、減少数列($i = 1, 2, \dots, n$) ($n \geq 2$) とするとき、次式が成立する。

$$\bar{s} \sum_{i=1}^n b_i > \sum_{i=1}^n s_i b_i \quad (\bar{s} \text{は } s_i \text{の平均}) \quad (11)$$

【証明】 付録参照。

この命題において、 $\{s_i\}, \{b_i\}$ が増加、減少である条件は、 b_i が小さいほど(部分選挙区が小さいほど) s_i が大きいという状況を反映させたものである。

ウラナー(Urlaner, C. J. (1989))は選挙活動での候補者と投票者の間に介在するリーダーの行動を投票参加モデルに取り入れた。このモデルでは、投票者の消費的価値 C^+, C^- を投票者固有の価値 C_1^+, C_1^- とリーダーが操作可能な価値 C_2^+, C_2^- にそれぞれ分解する。ここで、

$$C^+ = C_1^+ - C_2^+, \quad C^- = C_1^- + C_2^- \quad (12)$$

たとえば労働組合を例にとると、 C_2^+ はリーダー(組合)によるペナルティ、すなわち棄権により組合から非協力的扱いを受けること、 C_2^- は、リーダー(組合)の投票への呼びかけに協力する(投票することによって、連帯感や組合からの援助期待などが考えられる。つまり、 C^+, C^- の一部(C_2^+, C_2^-)が選挙結果に対する投票者の効用差 B とは別に、投票参加はリーダーを中心とする集団の中で投資的価値 $p' \cdot (C_2^+ + C_2^-)$ を生むことになる。すなわち、

$$R = pB + p' \cdot (C_2^+ + C_2^-) - (C_1^+ - C_1^-) \quad (13)$$

ここで p' は、投票の有無による組合からのペナルティや援助期待の可能性を表し、組合の情報ネットワークの緊密性に依存するが、 p よりはるかに大きいものも考えられる。このようにウラナーのリーダーの介在の提案は、シュワルツモデルに含まれるが、ウラナーはさらにリーダーと候補者との関連性をも論じており、これが次の効用差の連続的效果を与えることになる。

4-2 得票数に対する効用連続型モデル

投票者の効用が選好する候補者の勝敗のみで決

得票数 X の分布		効用
投票	$F_1(x)$	$\rightarrow B(x) - C$
	$F_2(x)$	$\rightarrow B(x)$

図3 投票者の意思決定問題II

選挙結果(確率)		政策変更(確率)	効用
投票	勝利(p_1)	有(p_3)	$\rightarrow B^* - C$
		無($1-p_3$)	$\rightarrow B - C$
	敗北($1-p_1$)		$\rightarrow -C$
棄権	勝利(p_2)	有(p_4)	$\rightarrow B^*$
		無($1-p_4$)	$\rightarrow B$
	敗北($1-p_2$)		$\rightarrow 0$

図4 リーダーモデルの有権者の意思決定問題

定されるのではなく、その候補者の得票数¹⁷⁾に対して連続的に増やすことを考える。これは、候補者の得票が候補者の政策に影響を与えることを考慮するものである。図3において、投票者は投票によって得票数を1だけ動かすことができるので、得票数 x の確率分布 F_1 は F_2 よりちょっとだけ左に平衡移動したものになる。このとき R_v と R_A の差 R は、

$$R = \int B(x) d(F_1 - F_2) - C \quad (14)$$

である。2候補者の選挙において得票数が $[0, 1]$ に正規化(有効投票総数を1とする)されている場合、以下のような特殊な場合がダウنزモデルにあたる。

$$1 - F_1(1/2) = p_1, \quad 1 - F_2(1/2) = p_2, \\ B(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1/2) \\ B & (1/2 < x \leq 1) \end{cases} \quad (15)$$

ここで提案する意思決定問題IIにもとづく効用連続型の投票参加モデルの背景にはウラナーが提案している候補者の政策変更モデルがある。候補者は当選した場合、ある集団での獲得票が多ければ長期的戦略を考えて公約していた政策(投票者の効用差 B)をその集団よりの政策(効用差 B^* ($> B$))に変更するであろう。候補者は集団のリーダーとの間の交渉を通して投票者の意向を知ることになる。

p_1, p_2 を、投票者がある候補者に投票して当選する確率、投票しないで当選する確率 ($p_1 > p_2$)、

p_3, p_4 を、投票して候補者が当選した場合、投票しないで候補者が当選した場合に政策を投票者よりの政策に変更する確率 ($p_3 > p_4$) とすると、投票者の意思決定問題は図4で示され、投票参加モデルは次のようになる。

$$R = (p_1 p_3 - p_2 p_4)(B^* - B) + (p_1 - p_2)B - C \quad (16)$$

ダウنزモデル(1)と比較して、第1項がリーダーの候補者への活動に伴う R の増加への寄与である。(16)式も形式的にはシュワルツモデルに帰着できるが、政策変更を有無で表現しないでその大きさを考慮にいった場合を考えると、政策変更モデルは効用連続型モデル(14)で表す方が一般的になる。本論ではシュワルツモデルは投票者の多様な部分選挙区での候補者の当落による効用差を考えるとという「面的」な広がりを持たせることを指摘しており、候補者の得票数に対する効用の連続的変化という「線的」な効用差は対象としないものとする。したがって、ウラナーモデルでのリーダーの存在はシュワルツモデルに含まれるが、得票数に絡んだリーダーと候補者間の交渉による候補者の政策変更は、効用連続型モデルで表すことになる。

5. 効用連続型モデルによる投票参加分析

本論で提案しているモデルは、シュワルツモデルのような多様性をもった効用連続型モデルである。いままで、投票者の一票の選挙結果に与える影響を主観確率で考えてきたが、ここでは投票者の票数の読みを確率分布で与え、その分布の平均、分散をパラメータとして与えて、投資的価値の動きを分析する。

ここでも、2候補者選挙を考える。また簡単のために投票総数を1とする。有権者は選好する候補者に投じられる票数上に効用関数 $u(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) と票数の読み X をもっているとする。 X は確率変数で確率密度 $f(x)$ に従うものとする。

Riker, W. H. *et al* (1968) は、票数上に効用を連続関数とし、票数の読みを確率分布で与えて、有権者の期待効用 U を、

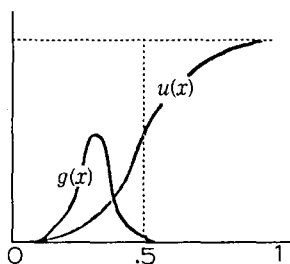


図5 有権者の期待効用

$$U = \int_0^1 u(x) f(x) dx \quad (18)$$

で与えた(図5)。ダウンスモデル(1)では、 $u(x)$ が $x=1/2$ でのみ B だけ変動するステップ関数と考えられており、ここではより一般的なS字型連続関数にしてやろうという狙いがある。本論でも(18)式を基礎にして分析を試みる。

まず、 f は以下の条件をみたす1つの確率密度関数 $\bar{f}$ をもとに定める¹⁸⁾。

[確率密度関数 f に課す条件]

[f1] $\bar{f}$ の平均値は0, 分散は1で, 有界変動関数¹⁹⁾とする。

[f2] $|x| < |y|$ ならば, $\bar{f}(x) \geq \bar{f}(y)$

[f3] $\exists \delta > 0; \forall x (|x| \geq \delta) \rightarrow \bar{f}(x) = 0$.

X の確率密度関数 f は2つのパラメータ $\mu (0 < \mu < 1), \sigma (0 < \sigma \leq \min\{\frac{\mu}{\delta}, \frac{1-\mu}{\delta}\})$ を与えて次式で定義する。

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \bar{f}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (17)$$

$\bar{f}$ を固定して、 μ, σ の2つのパラメーターで定義された密度関数 f は、平均、分散がそれぞれ μ, σ^2 であり、[f3]より $f(0)=f(1)=0$ をみたしている。

以上のように、票数の読みについてその期待値 μ , および分散 σ^2 を与えることによって投票による期待効用が計算でき、 μ, σ^2 による投票参加の感度分析が可能となる。

効用関数 u には解析の必要上、次の条件を課す。

[効用関数 $u(x)$ に課す条件]

[u1] $u(x)$ は $[0,1]$ において2回連続微分可能で、単調増加関数である。

[u2] $u'(x)$ のグラフは、 $(x_0, u(x_0))$ に関して点対称である。

[u2]は、 $u'(x)$ が $x=x_0$ で対称であること、また $u(x)$ が狭義の単調増加関数であれば、 $x=x_0$ で最大

値をとることを意味している。

有権者は投票によって μ を少しだけ動かすことができ、 U の一票あたりの変化、すなわち U の μ による偏微分係数 $\frac{\partial U}{\partial \mu}$ が投資的価値(IV)となる¹⁷⁾。

例えば、効用関数が $u(x) = \frac{-2x^3 + 3x^2}{6}$ のとき、 $u(x)$ は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{12})$ で対称であり、 $IV = \mu - \mu^2 - \sigma^2$ と計算される(木谷, 村瀬(1993))。これは、候補者間の票差と政策差の間に比例的な関係(u が緩やかなS字カーブを描く)があること想定している。これによれば、 σ が一定の場合、 $\mu = \frac{1}{2}$, すなわち有権者が期待値において接戦になると考えているときIVは最大となる。つまり、接戦の状況がもっとも投資的価値が大きいことは従来通りである。もし、さらに接戦であることを票の読みからの確に判断できる(σ が小さい)ような有権者はさらに投票の投資的価値が増す。このような解釈は、次の2つの命題から一般的である。

[命題5] (投資的価値の μ に関する最大値)

投資的価値IVは $\sigma (0 < \sigma \leq \min\{\frac{\mu}{\delta}, \frac{1-\mu}{\delta}\})$ を固定したとき、 $\mu = x_0$ で最大値をとる。

[証明] 付録参照。 I

[命題6] (投資的価値の σ に関する単調減少性)

u'' を単調減少関数とする。このとき、投資的価値IVは μ を固定したとき、 σ について単調減少である。

[証明] 付録参照。 I

6. 結論と今後の課題

筆者は最初、無投票のパラドックスを解決するような投票参加モデルを提案して何に役立つのかという素朴な疑問があった。しかし先頃の日本の選挙制度改革において、民意反映や政権交代の容易さなどが殆ど比例代表制を含めて選挙区の修正から論じられていた。現在では投票率は50%程度まで落込んでいるのである。民意反映をいうなら、どうしたら有権者は投票に行くのか、どうしたら pB を大きくできるのかという有権者の投票参加も選挙制度改革での重要な課題になってしかるべきであると考えようになった。また、一方で合理

的選択モデルで投票参加行動を説明しようとする試みを冷やかにみていた。自分の投票参加に照してみてもあまりにも有りそうもない行動規範を仮定しているように思えたからである。しかし、その代案として論理的に投票参加を説明するためにはダウنزモデルを基本とする以外に考えられなかった。ダウنزの投票参加モデルが、現実の有権者の投票参加をうまく説明できないとの批判から数多くの修正が試みられたが、これらの研究者も同じ思いがあったように察する。

本論は、これらの投票参加モデルの修正の試みがあまり成功していないことに対して一石を投じることが念頭に、これまでの試みについて筆者からみた反省と修正モデルのあるべき方向性を提示することを目的とした。

結論的には、ダウنزモデルにおける投資的価値を分析するために、シュワルツモデルとウラナーモデルを合体させ、選挙結果に対する効用を票数の連続関数にして、投資的価値からみた投票参加行動の解析的枠組みを与えた。『人はなぜ投票に行くのか』を説明するにはシュワルツの効用の線形加算的モデルが適当と思われる。しかし、シュワルツが考えていた部分選挙区モデルは統計的に実証されていないことから、ウラナーモデルでの例のように部分選挙区として候補者と密接な関係をもつ労働組合、生活共同組合、宗教団体などを考えるべきであろう。この時、投資的価値は主観確率を区毎にバラバラに持つより、選挙全体で一つ持つ方が高いことが導かれる(命題4)。さらに連続型モデルでは、接戦と票数の読みの確実性が投票による投資的価値の増加を生むことを解析的に示した(命題5, 6)。

今後の課題としては、シュワルツモデルの統計的検証、投資的価値 pB のうち、 B の見積りの範囲およびその方法、消費的価値と投票参加の相関、さらに一般の多候補者モデルへの課題の検討などが挙げられよう。しかし、ダウنزモデル以外のモデルの可能性も捨てきれない。

1) 合理的選択行動モデルを用いるこのような傾向は、社会学、特に行動科学の分野でも広がってきている。例えば、社会的ジレンマモデルがあり、論文集としてまとめたものに原、海野(1985, 1988)がある。

2) 政党の行動は有権者の政治的支持、たとえば選挙における得票数最大化を目指している。これは経済学で有名なホテリングの立地モデルに立脚したもので、選挙の空間理論とよばれている。空間理論について最近の論文を集めたものに Enelow, J. M. *et al* (1990) がある。

3) PB を投資的価値、 C を消費的価値という。詳しくは、Riker, W. H. *et al* (1973) を参照。

4) 符号付 Wilcoxon 検定という。

5) 例えば、投票結果を接戦度に回帰させてその有意な関連を調べた実証研究として、Silberman, J. *et al* (1975) を参照。なお、接戦度の測り方については、Cox, G. W. (1988) を参照。

6) n について、厳密には次のような点に注意しなければならない。

① n はある有権者以外の投票数である。

② (2) をみたす n は偶数である場合である。

③ n が奇数の場合は、 $k=(n-1)/2$ とする。

さらに、②と③については、得票が同数の場合の当選のルールが問題になる。これは通常、Coin-toss (くじ) による決定、Status-quo (現状維持) の2つのタイプを前提にして分析される(Palfrey, T. R. *et al* (1983) のゲーム論的分析を参照)。しかし、これらは少数者での選挙などを前提とするものであって、本論ではこのような厳密性を仮定しない。

7) 2項分布 $b(k; n; p) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$ において、 $x=(k-np)/(npq)^{1/2}$ とおくと、 x は漸近的に標準正規分布にしたがうので、 ${}_nC_k p^k q^{n-k} \sim (2\pi npq)^{-1/2} \exp\{-(k-np)^2/2npq\}$ ($q=1-p$)

8) $[0, 1]$ において、関数列 $\{f_n\}$ が f に L_1 収束すると
は、 $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

9) $\alpha, \beta (> 0)$ に対して、 $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$ が成立つ。この値を α, β の関数 $B(\alpha, \beta)$ とみて、ベータ関数という。

ここで、 $\alpha! = \Gamma(\alpha+1)$ (Γ : ガンマ関数) である。したがって、2つのパラメータ $\alpha, \beta (>0)$ をもつ確率分布

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

が定義でき、これをベータ分布という。

- 10) 尤度 (標本の出方の情報) をもとにある確率分布のパラメータ α (これを確率変数とみる) の確率分布をベイズの定理から求めたもの。

- 11) ここでも少人数での選挙では、6) のような注意をする必要がある。

- 12) ここでは、 $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ が次の条件を満たすことと同値。

$q_i^* > 0 \Leftrightarrow i$ は投票することで、

$$(q_1^*, q_2^*, q_{i-1}^*, 0, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*)$$

の結果より高い効用が得られる。 (Vi)

$q_i^* < 1 \Leftrightarrow i$ は棄権することで、

$$(q_1^*, q_2^*, q_{i-1}^*, 0, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*)$$

の結果より高い効用が得られる。 (Vi)

- 13) $P(N_1^{-1} = N_2^{-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} W_k(n_1-1, q) \cdot W_k(n_2, q)$
 $(W_k(n, q) = {}_n C_k q^k (1-q)^{n-k})$

- 14) 不完備情報ゲームにおいて、ベイズ型決定ルール上で与えたナッシュ均衡で、ここでは、投票コストの限界値 c の上で考える。

- 15) ある意思決定を選択しなかった場合に考えられる最大の後悔を最小にするような意思決定方式。

- 16) Kirchgassner, G. et al (1992) は、1987年の西ドイツ総選挙における投票所レベルの接戦度と投票率の間での関連性に着目してシュワルツモデルを検証しようとしたが、有意差は認められていない。

- 17) 政党行動モデルでも、勝敗を重視する得票差最大化モデルの他に、支持率を重視する得票数最大化モデルがあり、政党は獲得する票数によって支持者に対する政策を変えることもある。(Hinich, M. J. et al (1970))

- 18) 例を挙げれば、

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}-|x|}{6} & (|x| \leq \sqrt{6}) \\ 0 & (|x| > \sqrt{6}) \end{cases}$$

$\tilde{f}$ に標準正規分布を考えたとき、③を満足しないが δ を十分に大きい正数として本論と同様の議論が可能となる。しかし、効用関数 u に新たな細かな条件を付け加える必要があり、技術的な煩雑さがより生産

的な議論を生まないと判断し、ここでは厳密に③を満足する $\tilde{f}$ を与えるものとする。

- 19) f によるスティルチエス積分を実行するための仮定。

$$f \text{ が } [0,1] \text{ で有界変動} \Leftrightarrow \sup_{\Delta} \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\} < +\infty$$

Δ は $[0,1]$ の分割: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$

付 録

(命題4の証明)

n による帰納法により証明する。 $n=2$ のとき、次式より (9) 式は成立する。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(p_1+p_2)(b_1+b_2) - (p_1b_1+p_2b_2) = \\ & -\frac{1}{2}(p_1-p_2)(b_1-b_2) > 0 \end{aligned} \quad (\alpha)$$

$n=k$ のとき、(9) が成立すると仮定する。すなわち、

$$\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k p_i \right) \left(\sum_{i=1}^k b_i \right) > \left(\sum_{i=1}^k p_i b_i \right) \quad (\beta)$$

このとき、 $n=k+1$ のときの (9) 式の右辺に (β) を直接代入して、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i b_i \right) = \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=1}^k p_i + p_{k+1} \right) \left(\sum_{i=1}^k b_i + b_{k+1} \right) \\ & - \left(\sum_{i=1}^k p_i b_i + p_{k+1} b_{k+1} \right) > \frac{1}{k+1} \left\{ p_{k+1} \sum_{i=1}^k b_i + b_{k+1} \sum_{i=1}^k p_i \right. \\ & \left. - k p_{k+1} b_{k+1} - \sum_{i=1}^k p_i b_i \right\} \end{aligned} \quad (\gamma)$$

ここで、 p_i, p_{k+1} と b_i, b_{k+1} について (α) を適用すると、

$$\frac{1}{2}(p_i + p_{k+1})(b_i + b_{k+1}) - (p_i b_i + p_{k+1} b_{k+1}) > 0$$

$$(i=1, 2, \dots, k) \quad (\delta)$$

(δ) を辺々加えると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k p_i b_i + p_{k+1} \sum_{i=1}^k b_i + b_{k+1} \sum_{i=1}^k p_i + k p_{k+1} b_{k+1} \right) \\ & - \left(\sum_{i=1}^k p_i b_i + k p_{k+1} b_{k+1} \right) > 0 \\ & \therefore \left(p_{k+1} \sum_{i=1}^k b_i + b_{k+1} \sum_{i=1}^k p_i \right) > \sum_{i=1}^k p_i b_i + k p_{k+1} b_{k+1} \quad (\varepsilon) \end{aligned}$$

(ε) より、(γ) の右辺は正であり、 $n=k+1$ のときも (9) が成立する。

(命題5の証明)

(18) 式を μ で偏微分したものが投資的価値 IV であるから、

$$\begin{aligned} IV &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\int_0^1 u(x) \left\{ \frac{1}{\sigma} \tilde{f} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\} dx \right] \\ &= \int_0^1 u(x) \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \tilde{f} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\} \right] dx = -\frac{1}{\sigma} \int_0^1 u(x) d\tilde{f} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{\sigma} \left[u(x) \tilde{f} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right]_0^1 + \frac{1}{\sigma} \int_0^1 u'(x) \tilde{f} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) dx \\ & \quad \text{(部分積分)} \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^1 u'(x) \tilde{f} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) dx \quad ((f3) \text{ と } \sigma \text{ の条件}) \end{aligned}$$

さらに、 IV を μ で偏微分し、上と同様な変形を行えば、

$$\frac{\partial IV}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^1 u''(x) \tilde{f} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) dx \quad \dots \quad (\alpha)$$

であり、(α) の積分区間を $x=x_0$ で分けると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial IV}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_0^{x_0} u''(x) \bar{f}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx + \int_{x_0}^1 u''(x) \bar{f}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_0^{x_0} u''(x_0-x) \bar{f}\left(\frac{x_0-x-\mu}{\sigma}\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{1-x_0} u''(x_0+x) \bar{f}\left(\frac{x_0+x-\mu}{\sigma}\right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_0^{\max(x_0, 1-x_0)} u''(x_0-x) \left\{ \bar{f}\left(\frac{x_0-x-\mu}{\sigma}\right) - \bar{f}\left(\frac{x_0+x-\mu}{\sigma}\right) \right\} dx \right\} \\ &\quad \dots\dots (\beta)\end{aligned}$$

$(u''(-x) = -u''(x))(\{u1\}, \{u2\})$, および $\{f3\}$)

ここで, $\{f2\}$ より, (β) の被積分項は $\mu > x_0$ で常に正, $\mu > x_0$ で常に負, $\mu = x_0$ で 0 となり, IV は $\mu = x_0$ で最大となる。

(命題 6 の証明)

$\frac{\partial IV}{\partial \mu} < 0$ を示せばよい。命題 5 の証明と同様に部分積分を行う。

$$\begin{aligned}\frac{\partial IV}{\partial \mu} &= \left\{ \int_0^1 u'(x) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{1}{\sigma} \bar{f}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right\} dx \right. \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^1 (x-\mu) u'(x) d\bar{f}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^1 u'(x) \bar{f}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^1 (x-\mu) u''(x) \bar{f}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \quad \dots\dots (\alpha)\end{aligned}$$

u' は単調減少で $u'(x_0) = 0$ であるから, $(x-\mu) u''(x) > 0$ となるのは, $\mu < x < x_0$ または $x_0 < x < \mu$ のときである。 $\bar{f}$ の $x = \mu$ での対称性より (α) は負であることが分かる。

参考文献

- Cox, G. W. (1988) "Closeness and Turnout: A Methodological Note", *Journal of Politics*, 50, 768~778.
- DOWNS A. (1957) *An Economic Theory of Democracy*, New York: Harper & Row, 268pp.
- Enelow, J. M., Hinich, M. J. (1990): *Advances in the Spatial Theory of Voting*, Cambridge University Press, 240pp.
- Ferejohn, J. A., Fiorina, M. P. (1974) "The Paradox of not Voting: A Decision - Theoretical Analysis", *American Political Science Review*, 68, 525~536.
- Grofman, B. (1983) "Models of Voter Turnout: A Brief Idiosyncratic Review", *Public Choice*, 41, 55~62.
- Good, I. J., Mayer, L. S. (1975) "Estimating the Efficacy of a Vote", *Behavioral Science*, 20, 25~33.
- 橋本晃和 (1994) 「人はなぜ投票にいかないか」『朝日新聞』(論壇 1.11 付)
- 原純輔, 海野道郎編 (1985) 『数理社会学の現在』, 数理社会学研究会, 360pp.
- Hinich, M. J., Ordeshook, P. C. (1970) "Plurality Maximization VS Vote Maximization", *American Political Science Review*, 64, 772~791.
- 木谷忍, 村瀬洋一 (1993) 「人はなぜ投票するのか - 無投票のパラドックスを巡って -」, 日本行動計量学会第 21 回大会発表論文抄録集, 66~69.
- Kirchgassner, G., Schimmelpennig, J. (1992) "Closeness Counts if it Matters for Electoral Victory", *Public Choice*, 73, 283~299.
- 小林良彰 (1988) 『公共選択』東京大学出版会, 237pp.
- Mueller, D. C. (1989) *Public Choice II*, Cambridge University Press. (加藤寛監訳 (1993) 『公共選択』有斐閣, 500pp)
- Palfrey, T. R., Rosenthal, H. (1983) "A Strategic Calculus of Voting", *Public Choice*, 41, 7~53.
- Rae, D. (1969) "Decision Rules and Individual Values in Constitutional Choice", *American Political Science Review*, 63, pp40~56.
- Riker, W. H., Ordeshook, P. C. (1968) "A Theory of the Calculus of Voting", *American Political Science Review*, 62, 25~42.
- Riker, W. H., Ordeshook, P. C. (1973) *An Introduction to Positive Political Theory*, Prentice-Hall, 387pp.
- Schwartz, T. (1987) "Your Vote Counts on Account of the Way it is Counted", *Public Choice*, 54, pp101~121.
- Silberman, J., Durden, G. (1975) "The Rational Behavior Theory of Voting Participation: The Evidence from Congressional Elections", *Public Choice*, 23, pp101~108.
- 海野道郎, 原純輔, 和田修一編 (1988) 『数理社会学の展開』数理社会学研究会, 488pp.
- Urlaner, C. J. (1989) "Rational Turnout: Neglected Role of Groups", *American Journal of Political Science*, 33, pp390~422.
- Urlaner, C. J. (1993) "What the Downsian Voter Weights - A Reassessment of the Costs and Benefits of Action", *Information, Participation, and Choice* (Grofman, B. Ed.), University of Michigan Press, pp67~79.